Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia nr 2/2017 (86)

DOI: 10.18276/frfu.2017.86-15 s. 185–196

Struktura portfeli efektywnych w modelach średnia-wariancja-skośność

Renata Dudzińska-Baryła, Donata Kopańska-Bródka, Ewa Michalska*

Streszczenie: *Cel* – Obserwowane w praktyce inwestycyjnej rozkłady stóp zwrotu instrumentów finansowych są rozkładami asymetrycznymi, zatem modele uwzględniające tylko średnią i wariancję pomijają istotne własności tworzonych portfeli inwestycyjnych. Celem pracy jest analiza stopnia dywersyfikacji portfeli uwzględniających dodatkowe kryterium maksymalizacji trzeciego momentu centralnego będącego miarą skośności.
Metodologia badania – W pracy analizowano podzbiory portfeli efektywnych, których struktura jest taka sama. Uwzględniając dodatkowo kryterium maksymalizacji trzeciego momentu centralnego, wyznaczono zbiory portfeli optymalnych o tym samym stopniu dywersyfikacji. Omawiane podejście zastosowano do analizy portfeli spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.
Wynik – Pokazano, że uzupełnienie analizy portfeli efektywnych o skośność w sposób znaczący zmienia optymalną strukturę portfeli. Im większa siła preferencji odnośnie do skośności, tym stopień zdywersyfikowania portfeli jest mniejszy.
Oryginalność/Wartość – W pracy zaproponowano trzykryterialny model wyboru optymalnego portfela akcji uwzględniający jednoczesną maksymalizację wartości oczekiwanej i skośności oraz minimalizację wariancji. Parametryczna analiza stopnia dywersyfikacji pozwoliła na badanie stabilności struktury portfeli optymalnych w zależności od preferencji inwestora w odniesieniu do wartości oczekiwanej stopy zwrotu oraz skośności stopy zwrotu.

Słowa kluczowe: skośność, dywersyfikacja, portfele efektywne

Wprowadzenie

W klasycznym podejściu Markowitza optymalizacja portfela akcji uwzględnia kryterium średnia-wariancja przy założeniu, że losowe stopy zwrotu akcji mają rozkład normalny. Jednak jak potwierdzają badania, rozkłady stóp zwrotu instrumentów finansowych są rozkładami asymetrycznymi, zatem modele oparte tylko na średniej i wariancji pomijają istotne własności tworzonych portfeli inwestycyjnych. Asymetria rozkładu losowych stóp zwrotu oraz znaczenie tego faktu dla decyzji inwestycyjnych są przedmiotem rozważań wielu prac, np. Arditti (1975), Xiong i Idzorek (2011). Piasecki i Tomasik (2013, s. 87) wykazali, że

* dr Renata Dudzińska-Baryła, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katedra Badań Operacyjnych, e-mail: dudzinska@ue.katowice.pl; prof. zw. dr hab. Donata Kopańska-Bródka, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katedra Badań Operacyjnych, e-mail: broda@ue.katowice.pl; dr Ewa Michalska, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katedra Badań Operacyjnych, e-mail: ewa.michalska@ue.katowice.pl

„empiryczny rozkład stopy zwrotu zawsze najlepiej jest aproksymować przez normalny odwrotny rozkład gaussowski NIG (ang. *Normal Inverse Gaussian Distribution*)". Co więcej, rozkład ten charakteryzuje dodatnia skośność (Nguyen, Chen, Gupta, 2003). Preferencje decydenta dokonującego wyboru w zbiorze losowych wariantów o rozkładach asymetrycznych można wyrazić poprzez ocenę momentów wyższych rzędów rozkładu prawdopodobieństwa. Decydenci preferują te warianty, którym odpowiadają wyższe wartości momentów rzędu nieparzystego (wartość oczekiwana, skośność) oraz niższe rzędu parzystego (wariancja, kurtoza). Maksymalizacja wartości oczekiwanej jako miary dochodu oznacza, że decydent woli mieć więcej niż mniej. Minimalizacja wariancji będącej miarą ryzyka odzwierciedla jego awersję do ryzyka, zaś maksymalizacja skośności jest wyrazem preferowania większego prawdopodobieństwa wysokich dochodów i ograniczania prawdopodobieństwa małych wartości.

Uwzględnienie miary skośności w postaci trzeciego momentu centralnego w modelach wyboru portfeli optymalnych rozważano już od początku lat siedemdziesiątych (Simonson, 1972; Kane, 1982; Barone-Adesi, 1985; Lai, 1991; Konno, Shirakawa, Yamazaki, 1993). Jednak dopiero rozwój narzędzi informatycznych usprawniających obliczenia numeryczne spowodował wzrost ilości publikacji, których autorzy analizują portfele otrzymane po uwzględnieniu momentów wyższych rzędów losowych stóp zwrotu (Athayde, Flores, 2004; Malevergne, Sornette, 2005; Guidolin, Timmermann, 2008; Li Qin, Kar, 2010; Kemalbay, Özkut, Franko, 2011; Proelss, Schweizer, 2014; Kim, Fabozzi, Cheridito, Fox, 2014; Kopańska-Bródka, 2014; Dudzińska-Baryła, Kopańska-Bródka, Michalska, 2015).

Zasadnicze znaczenie w analizie decyzji inwestycyjnych ma zbiór portfeli tworzących granicę efektywną. W sytuacji kiedy w modelu wyboru portfela akcji rozważane są tylko dwa pierwsze momenty, a krótka sprzedaż jest zabroniona, granica efektywna jest krzywą w przestrzeni dwuwymiarowej i można ją utworzyć, wyznaczając jedynie tzw. portfele narożne (ang. *corner portfolios*). Portfele te dzielą linię efektywną na podzbiory portfeli o takiej samej strukturze, co znaczy, że stopień zdywersyfikowania portfeli danego podzbioru (mierzony liczbą akcji w portfelu o dodatnim udziale) jest taki sam, a podział ten zależy tylko od nieujemnych wartości pewnego parametru (Dudzińska, 2002). Stopień dywersyfikacji portfeli efektywnych zależy także od tego, czy krótka sprzedaż jest dozwolona, czy nie. W sytuacji gdy krótka sprzedaż jest dozwolona, portfele efektywne mają wyższy stopień dywersyfikacji niż portfele wyznaczone przy zabronionej krótkiej sprzedaży, szczególnie w przypadku portfeli o wysokich pożądanych stopach zwrotu. Granica efektywna wyznaczona na podstawie modelu wyboru portfela, w którym funkcja kryterium zależy od trzech pierwszych momentów, jest powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej, dla której określenie portfeli narożnych nie ma sensu. Jednak pozostaje problem wyznaczenia takich podzbiorów portfeli z tej powierzchni, dla których stopień zdywersyfikowania jest taki sam. Celem artykułu jest analiza stopnia dywersyfikacji portfeli uwzględniających dodatkowe kryterium maksymalizacji trzeciego momentu centralnego będącego miarą skośności. W badaniach empirycznych wykorzystano notowania spółek indeksu WIG20 z pierwszego kwartału 2016. Wyniki empiryczne zamieszczone w części drugiej posłużą do ilustracji problemu dywersyfikacji portfela w sytuacji, gdy uwzględniane są trzy parametry rozkładu losowych stóp zwrotu: średnia, wariancja i skośność.

1. Modele wyboru portfeli efektywnych

Potencjalnymi składnikami rozważanych portfeli są akcje, których losowe stopy zwrotu R_i ($i = 1, ..., N$) tworzą wektor $\mathrm{R} = [R_1, R_2, ..., R_N]$, przy czym zakładamy, że oczekiwane wartości $\mathrm{E}[R_i] < \infty$. Wektor udziałów akcji w portfelu to $\mathrm{x} = [x_1, x_2, ..., x_N]$ dla $x_1 + x_2 + ... + x_N = 1$ oraz $x_i \geq 0$ dla $i = 1, ..., N$. Warunki nieujemności udziałów oznaczają, że nie jest dopuszczalna krótka sprzedaż składników portfela. Stopa zwrotu portfela akcji jest zmienną losową o rozkładzie generowanym przez rozkłady losowych stóp zwrotu składników portfela i wynosi $R_P = R_1 x_1 + R_2 x_2 + ... + R_N x_N$.

Oczekiwana wartość losowej stopy zwrotu portfela ($\mathrm{E}(R_P)$) jest momentem zwykłym rzędu pierwszego, natomiast wariancja portfela akcji (V_P) jest momentem centralnym rzędu drugiego losowej stopy zwrotu portfela. Jako miarę skośności rozkładu losowej stopy zwrotu portfela przyjmuje się jej moment centralny rzędu trzeciego. W zapisie macierzowym miarę skośność rozkładu losowej stopy zwrotu portfela wyraża zależność

$$\mathrm{S}_P = \mathrm{E}[\mathrm{R}_\mathrm{p} - \mathrm{E}(R_p)]^3 = \mathrm{x} \cdot \mathrm{M}_3 \cdot (\mathrm{x}^\mathrm{T} \otimes \mathrm{x}^\mathrm{T}), \tag{1}$$

gdzie symbol $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera. Elementami macierzy $\mathrm{M}_3 = \mathrm{E}[(\mathrm{R} - \mathrm{E}(\mathrm{R})) \cdot \cdot (\mathrm{R} - \mathrm{E}(\mathrm{R}))^\mathrm{T} \otimes (\mathrm{R} - \mathrm{E}(\mathrm{R}))^\mathrm{T})]$ (o wymiarach $(N \times N^2)$) są trzecie momenty centralne i ko--skośności losowych stóp zwrotu akcji. Miara skośności rozkładu losowej stopy zwrotu portfela może być również przedstawiona w postaci sumy

$$\mathrm{S}_P = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} s_{ijk} x_i x_j x_k , \tag{2}$$

gdzie $s_{ijk} = \mathrm{E}[(R_i - \mathrm{E}(R_i))(R_j - \mathrm{E}(R_j))(R_k - \mathrm{E}(R_k))]$, dla $i, j, k = 1, ..., N$.

Rozwiązania modelu Markowitza optymalizującego dwa pierwsze momenty losowej stopy zwrotu przedstawione w płaszczyźnie ryzyko-dochód tworzą zbiór portfeli efektywnych, tzw. granicę efektywną[1]. Dwukryterialny problem polegający na maksymalizacji wartości oczekiwanej i minimalizacji wariancji sprowadzany jest do jednokryterialnego zadania polegającego na maksymalizacji liniowej funkcji użyteczności względem dwóch pierwszych momentów rozkładu stopy zwrotu z portfela postaci

$$\mathrm{u}(\mathrm{E}, \mathrm{V}) = a\mathrm{E}(R_P) - b\mathrm{V}_P \tag{3}$$

[1] Portfel efektywny to taki portfel, dla którego nie istnieje inny o takim samym ryzyku i większym zysku ani portfel o takim samym zysku i mniejszym ryzyku (Haugen, 1996).

gdzie parametry a i b przyjmują wartości nieujemne. Dla a i b dodatnich funkcja (3) jest rosnąca względem wartości oczekiwanej i malejąca względem wariancji. Jeśli parametr b jest dodatni, to funkcja

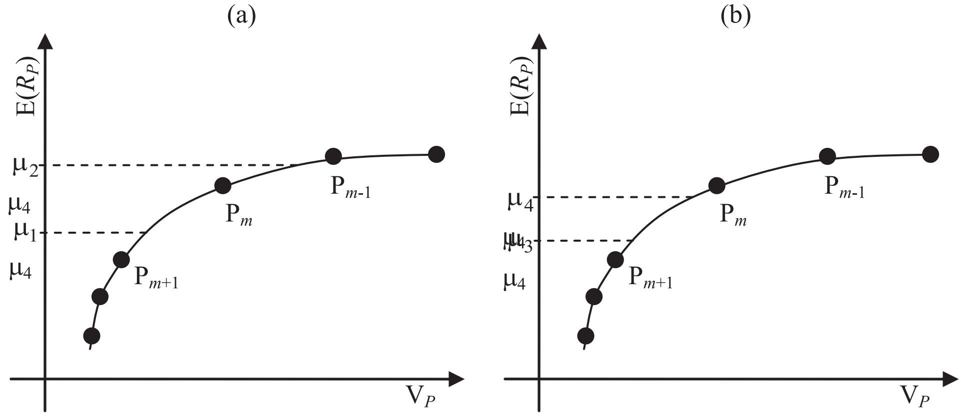
$$\mathrm{U(E,V)} = \frac{\mathrm{u(E,V)}}{b} = \lambda \mathrm{E}(R_P) - \mathrm{V}_P \tag{4}$$

gdzie $\lambda = a/b$, również jest rosnąca względem wartości oczekiwanej i malejąca względem wariancji. Ponadto rozwiązanie zadania polegającego na maksymalizacji funkcji (4) jest takie samo jak rozwiązanie problemu maksymalizacji funkcji (3). Zatem zbiór portfeli efektywnych można wyznaczyć, rozwiązując zadanie programowania kwadratowego postaci:

$$\begin{aligned} &\lambda \mathrm{E}(R_P) - \mathrm{V}_P \to \max \\ &\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ &x_i \geq 0, \qquad\qquad i = 1,\dots,N \end{aligned} \tag{5}$$

zmieniając wartości parametru λ w przedziale $\langle 0;+\infty)$. Jednak do określenia całej granicy efektywnej wystarczy zbiór portfeli narożnych. Warunkiem koniecznym tego, żeby dwa portfele z granicy efektywnej były sąsiednimi portfelami narożnymi, to jest, by ich skład różnił się dokładnie jednym walorem dodanym lub odjętym. Metodologia wyznaczania portfeli narożnych została szczegółowo przedstawiona m.in. w pracach: Sharpe (2000), Dudzińska (2002), Kopańska-Bródka (2004). Dysponując zbiorem portfeli narożnych, można określić udziały dowolnego portfela efektywnego jako wypukłej kombinacji liniowej udziałów dwóch sąsiednich portfeli narożnych.

Wyznaczając granicę efektywną z modelu (5), można określić takie przedziały parametru λ, dla których portfele efektywne będą miały taką samą strukturę. Jeśli więc inwestor zainteresowany będzie tylko i wyłącznie portfelami, które zawierają K instrumentów finansowych, to wystarczy wskazać odpowiedni fragment linii efektywnej pomiędzy dwoma sąsiadującymi portfelami narożnymi, z których jeden złożony jest z K akcji, a drugi z K-1 akcji. Jeśli natomiast preferencje inwestora dotyczące pierwszego lub drugiego momentu będą wyrażone odpowiednimi przedziałami wartości dla tych momentów, to na podstawie struktury portfeli narożnych można określić, jaki stopień zdywersyfikowania będą mieć jego portfele efektywne. Ilustrację geometryczną takiej sytuacji przedstawiono na rysunku 1. Portfele narożne z granicy efektywnej wyróżniono punktami. Załóżmy, że inwestor preferuje portfele o oczekiwanej stopie zwrotu z przedziału (μ_1, μ_2). Fragment linii efektywnej dla tak określonych preferencji inwestora zawiera tylko jeden portfel narożny P_m (rys. 1a), zatem portfele efektywne zgodne z jego preferencjami będą zawierać tyle instrumentów, ile zawiera portfel P_m bądź o jeden instrument więcej lub jeden mniej. W sytuacji gdy preferowanym portfelom odpowiada oczekiwana stopa zwrotu z przedziału (μ_3, μ_4), a przyporządkowany tym wartościom fragment linii efektywnej znajduje się pomiędzy portfelami narożnymi P_m i P_{m+1} (rys. 1b), wówczas stopień dywersyfikacji portfeli efektywnych zgodnych z takimi preferencjami inwestora będzie taki jak dla portfela P_m lub P_{m+1}. Analogicznie można określić stopień dywersyfikacji portfeli efektywnych w przypadku, gdy inwestor zdefiniuje swoje preferencje dotyczące poziomu ryzyka.



Rysunek 1. Portfele efektywne odpowiadające preferencjom inwestora odnośnie do oczekiwanej stopy zwrotu

Źródło: opracowanie własne.

Zagadnienie poszukiwania portfeli maksymalizujących wartość oczekiwaną i skośność oraz minimalizujących wariancję jest zadaniem optymalizacyjnym o trzech kryteriach. Zatem w ogólnym rozumieniu portfelem efektywnym jest portfel, którego jeden z parametrów nie może być polepszony bez pogorszenia wartości co najmniej jednego z pozostałych parametrów. Podobnie jak to miało miejsce w zadaniu dwukryterialnym wyrażanym funkcją (4) maksymalizację funkcji użyteczności liniowej względem trzech pierwszych momentów rozkładu postaci

$$u(\mathrm{E},\mathrm{V},\mathrm{S}) = a\mathrm{E}(R_P) - b\mathrm{V}_P + c\mathrm{S}_P \tag{6}$$

dla dodatnich a, b i c można sprowadzić do zadania na maksymalizację funkcji

$$\mathrm{U}(\mathrm{E},\mathrm{V},\mathrm{S}) = \frac{u(\mathrm{E},\mathrm{V},\mathrm{S})}{b} = \lambda\mathrm{E}(R_P) - \mathrm{V}_P + \gamma\mathrm{S}_P \tag{7}$$

zależnej od dwóch parametrów λ i γ, gdzie $\lambda = a/b$ oraz $\gamma = c/b$.

W tym przypadku model wyboru portfela efektywnego można przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} &\lambda\mathrm{E}(R_P) - \mathrm{V}_P + \gamma\mathrm{S}_P \to \max \\ &\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \\ &x_i \geq 0 \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{8}$$

Jeżeli przyjmiemy $\lambda = 0$, to rozwiązaniami modelu (8) będą portfele efektywne w płaszczyźnie ryzyko-skośność. Dla $\gamma = 0$ model (8) sprowadza się do klasycznego modelu Markowitza (5). Z kolei dla $\lambda = 0$ i $\gamma = 0$ rozwiązaniem modelu (8) jest globalny portfel minimalnego ryzyka. Założenie dodatniej wartości parametru b jest równoznaczne z uwzględnianiem ryzyka w każdym z rozważanych wariantów modelu (8).

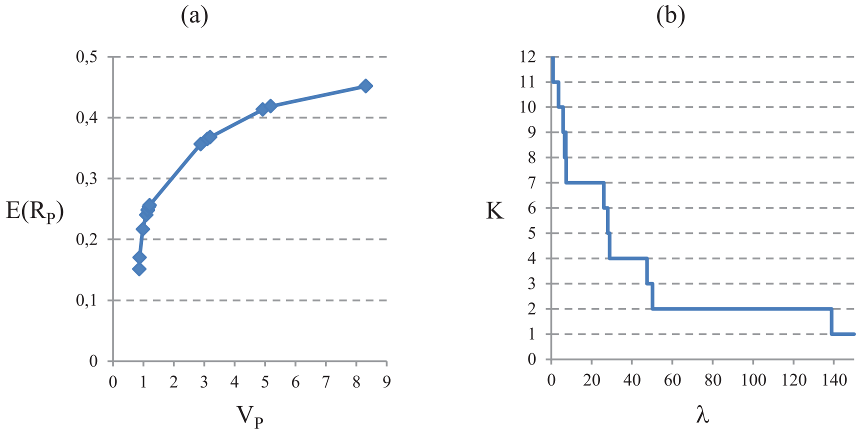
Dla $\lambda > 0$ i $\gamma > 0$ kryterium wyboru portfela w modelu (8) uwzględnia równocześnie wszystkie trzy momenty losowej stopy zwrotu portfela. W tej sytuacji granica efektywna jest powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej, jednak jej wyznaczenie stwarza duże trudności numeryczne, ponieważ polega na rozwiązywaniu zadań, które nie są problemami programowania wypukłego i nie można scharakteryzować tej powierzchni za pomocą portfeli narożnych. Pewną propozycję rozwiązania problemu wyboru portfela oraz geometrycznej interpretacji portfeli efektywnych w przestrzeni trójwymiarowej przedstawili Briec, Kerstens i Van de Woestyne (2013).

2. Dywersyfikacja portfeli optymalnych z kryterium średnia-wariancja-skośność

W badaniu nad optymalną strukturą portfeli wyznaczanych na podstawie modelu (8) uwzględniającego trzy kolejne momenty rozkładu losowej stopy zwrotu portfela wykorzystano dane dotyczące dziennych stóp zwrotu z pierwszego kwartału 2016 dla 13 akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, stanowiących składniki indeksu WIG20 (w prezentowanych wynikach pominięto spółki, które miały zerowe udziały we wszystkich portfelach narożnych wyznaczonych na podstawie modelu średnia-wariancja). Obliczenia wykonano w pakiecie SAS, wykorzystując jeden z algorytmów solvera NLPC – metodę typu Newtona z liniowym przeszukiwaniem (ang. *Newton-type method with line search*) oraz samodzielnie przygotowane programy.

W wykorzystanym modelu (8) wartości parametrów λ i γ były liczbami z przedziałów odpowiednio $\langle 0; 140 \rangle$ oraz $\langle 0; 85 \rangle$ z dokładnością do 0,5. Przyjęte ograniczenia górne dla parametrów λ i γ wynikają z tego, że powyżej tych wartości otrzymano tylko portfele jednoskładnikowe.

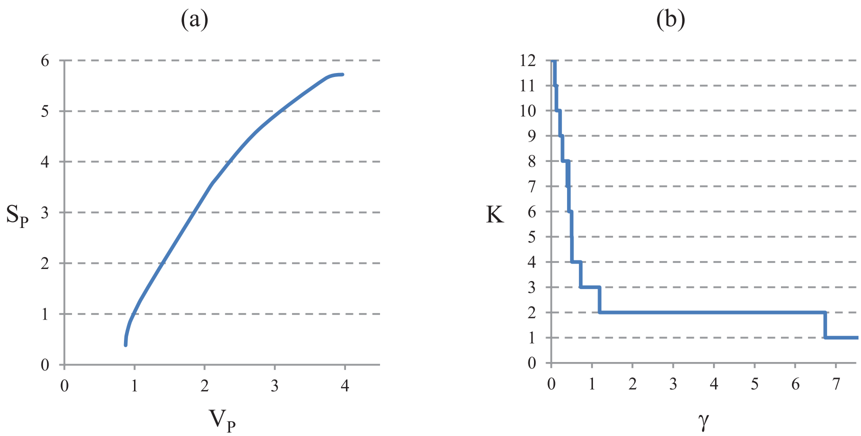
W przypadku gdy inwestor bierze pod uwagę dwie charakterystyki portfeli, tj. dochód i ryzyko lub skośność i ryzyko, wówczas model (8) staje się modelem dwukryterialnym. W szczególności dla $\gamma = 0$ rozwiązaniami modelu (8) są portfele efektywne ze względu na kryterium średnia-wariancja, przedstawione na rysunku 2a. Na rysunku tym zaznaczono także 14 portfeli narożnych. Z kolei na rysunku 2b zilustrowano stopień dywersyfikacji portfeli efektywnych. W portfelach tych ilość składników, wraz ze wzrostem wartości parametru λ, zmienia się o jeden walor, co jest zgodne z charakterystyką portfeli narożnych stanowiących podzbiór portfeli efektywnych.



Rysunek 2. Wartość oczekiwana i wariancja (a) oraz stopień dywersyfikacji (b) portfeli efektywnych dla kryterium średnia-wariancja

Źródło: opracowanie własne.

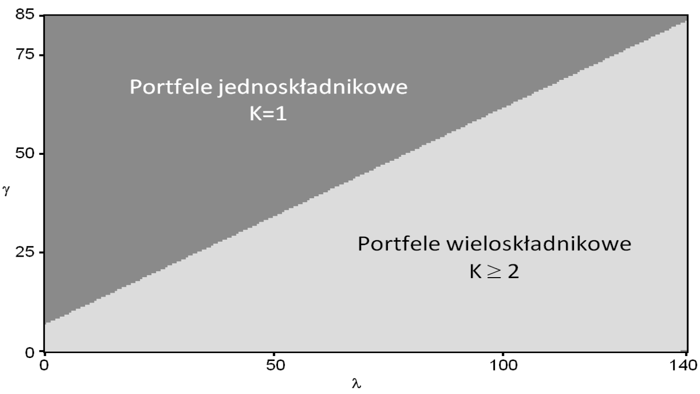
Jeżeli preferencje inwestora dotyczą tylko ryzyka i skośności portfeli, to w modelu (8) należy przyjąć $\lambda = 0$. Charakterystyki portfeli efektywnych wyznaczonych dla kryterium wariancja--skośność przedstawiono na rysunku 3a. Dla tych portfeli wraz ze wzrostem skośności rośnie równocześnie poziom ryzyka mierzony wariancją. Portfel położony najniżej jest globalnym portfelem minimalnego ryzyka i został wyznaczony dla $\gamma = 0$. Wraz ze wzrostem wartości parametru γ rośnie skośność portfeli, natomiast stopień ich zdywersyfikowania maleje (rys. 3b).



Rysunek 3. Skośność i wariancja (a) oraz stopień dywersyfikacji (b) portfeli efektywnych dla kryterium wariancja-skośność

Źródło: opracowanie własne.

Dla wartości parametru λ wynoszącej 0 portfele jednoskładnikowe otrzymano przy $\gamma = 6{,}75$, natomiast dla $\gamma = 0$ portfele jednoskładnikowe otrzymano dla $\lambda \geq 138{,}84$. Na rysunku 4 przedstawiono granicę podziału na portfele jednoskładnikowe i portfele zawierające co najmniej dwa składniki, w zależności od zadanych wartości parametrów λ i γ.

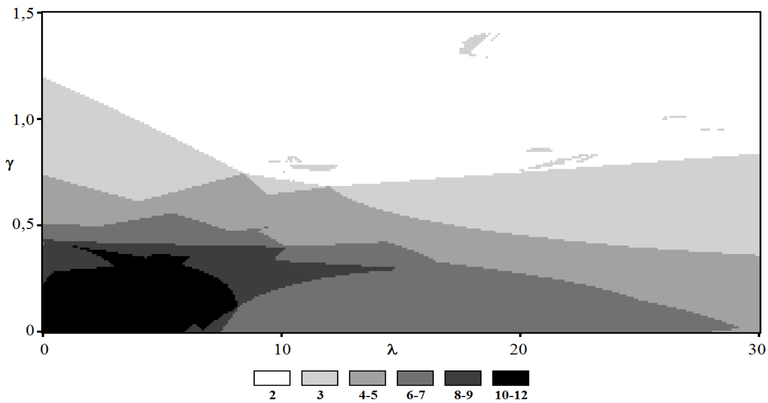


Rysunek 4. Portfele jednoskładnikowe i wieloskładnikowe dla $\lambda \in \langle 0;140 \rangle$ i $\gamma \in \langle 0;85 \rangle$

Źródło: opracowanie własne.

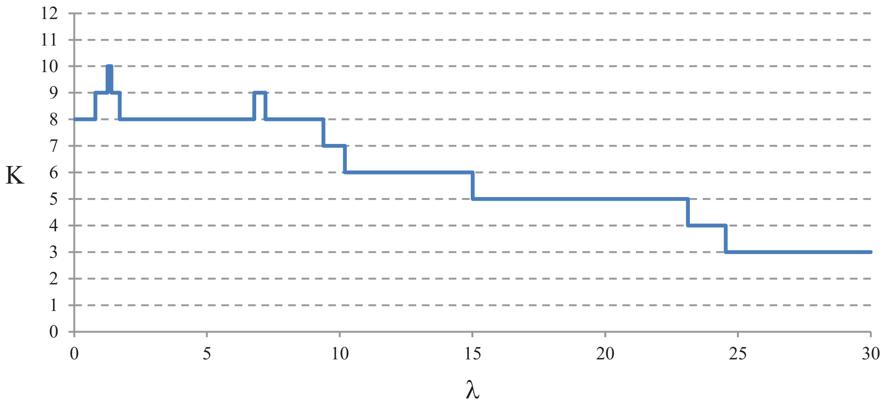
Do analizy stopnia zdywersyfikowania portfeli efektywnych względem trzech pierwszych momentów rozkładu można wykorzystać mapę stopnia zdywersyfikowania portfeli w zależności od parametrów λ i γ. Na rysunku 5 przedstawiono przykładowo mapę ilości składników w portfelach efektywnych dla ograniczonego zakresu parametrów λ i γ ($\lambda \in \langle 0;30 \rangle$ i $\gamma \in \langle 0;1{,}5 \rangle$). Wartościom parametrów λ i γ we wskazanych zakresach odpowiadają portfele o różnorodnej strukturze, zatem obszary zaznaczone jednym kolorem odpowiadają portfelom o zadanej strukturze, dla przykładu obszar oznaczony kolorem czarnym odpowiada portfelom o największym stopniu zdywersyfikowania (więcej niż 10 walorów). Dla wybranego stopnia zdywersyfikowania portfela inwestor może odczytać zakres odpowiadających mu wartości parametrów λ i γ.

Korzystając z przedstawionej na rysunku 5 mapy, inwestor może także dokonać analizy związku siły preferencji odnośnie do stopy zysku portfela lub skośności na stopień dywersyfikacji portfela. Siła preferencji inwestora dotycząca stopy zysku portfela jest wyrażana wartościami parametru λ, natomiast wartość parametru γ wyraża siłę preferencji dotyczącą skośności. Dla ustalonej wartości γ wynoszącej np. 0,4 wraz ze wzrostem siły preferencji w stosunku do stopy zysku portfela (wzrostem parametru λ) stopień dywersyfikacji portfela zmienia się o jeden walor dodany lub odjęty, podobnie jak miało to miejsce w przypadku portfeli narożnych (rys. 6). Dla dowolnie zadanego poziomu g portfele bardziej zdywersyfikowane odpowiadają mniejszym wartościom λ.



Rysunek 5. Mapa ilości składników w portfelach optymalnych dla $\lambda \in \langle 0;30 \rangle$ i $\gamma \in \langle 0;1,5 \rangle$

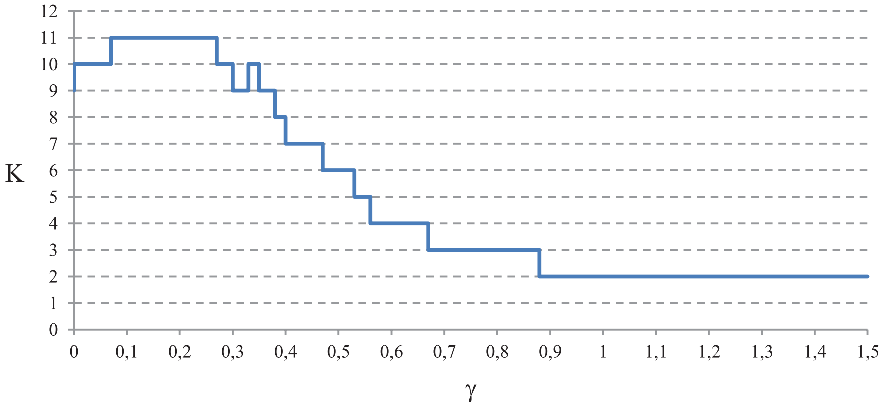
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 6. Stopień dywersyfikacji portfeli optymalnych dla kryterium średnia-wariancja--skośność dla $\gamma = 0,4$

Źródło: opracowanie własne.

Podobne wnioski można wysnuć dla ustalonej wartości parametru λ. Na rysunku 7 przedstawiono stopień dywersyfikacji portfeli dla $\lambda = 6$. Słabej sile preferencji skośności odpowiadają portfele bardziej zdywersyfikowane (9 do 11 walorów), a wraz ze wzrostem siły preferencji trzeciego momentu stopień dywersyfikacji portfeli szybko maleje.



Rysunek 7. Stopień dywersyfikacji portfeli optymalnych dla kryterium średnia-wariancja-skośność dla $\lambda = 6$

Źródło: opracowanie własne.

Dla dowolnych założonych poziomów siły preferencji dotyczącej średniej stopy zysku portfela lub skośności (reprezentowanych wartościami parametrów λ i γ) możliwe jest wykonanie wykresów stopnia dywersyfikacji portfeli efektywnych.

Uwagi końcowe

W analizie portfelowej bazującej wyłącznie na rozkładach losowych stóp zwrotu uwzględnianie wyższych momentów rozkładu jest konieczne. Analizę portfeli efektywnych ograniczoną do wartości oczekiwanej i wariancji można stosować tylko wówczas, gdy do wyznaczenia funkcji rozkładu prawdopodobieństwa wystarczy znajomość jedynie tych charakterystyk. Dotyczy to tylko rozkładu normalnego i jednostajnego.

Potrzeba uwzględnienia skośności w wyborze portfela optymalnego ma empiryczne i teoretyczne uzasadnienie. W większości przypadków rozkłady stóp zwrotu są rozkładami asymetrycznymi. Maksymalizacja skośności wyraża podstawowe preferencje decydenta polegające na zwiększeniu szans osiągania ponadprzeciętnych stóp zwrotu. Jednak wyznaczanie linii efektywnej dla zadania optymalizacyjnego, w którym funkcja kryterium zależy od trzech momentów, jest trudne i rzadko wykonywane ze względu na brak odpowiedniego algorytmu.

Jednym z podstawowych elementów procesu konstrukcji portfela inwestycyjnego jest wyznaczenie jego struktury, a tym samym określenie liczby tworzących go walorów. Powiązanie stopnia zdywersyfikowania portfeli efektywnych z odpowiednimi wartościami parametrów modelu (8) pozwala na wskazanie inwestorowi odpowiednich zadań wyboru portfela optymalnego, które odpowiadają jego preferencjom dotyczącym struktury.

Uwzględnienie w analizie portfelowej trzeciego momentu centralnego rozkładu stóp zwrotu wpływa na stopień dywersyfikacji. Im większa siła preferencji odnośnie do skośności, tym stopień zdywersyfikowania portfeli jest mniejszy. Ponadto wraz ze wzrostem wartości parametrów λ i γ ilość składników w portfelach zmienia się o jeden walor.

Literatura

Arditti, F.D. (1975). Skewness and Investor's Decisions: A Reply. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *10*, 173–176.

Athayde, G., Flores, R. (2004). Finding a Maximum Skewness Portfolio – A General Solution to Three-Moments Portfolio Choice. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *28*, 1335–1352.

Barone-Adesi, G. (1985). Arbitrage Equilibrium with Skewed Asset Returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *20*, 299–313.

Briec, W., Kerstens, K., Van de Woestyne, I. (2013). Portfolio selection with skewness: A comparison of methods and a generalized one fund result. *European Journal of Operational Research*, *230*, 412–421.

Dudzińska, R. (2002). Wykorzystanie portfeli rogowych do wyznaczania linii efektywnej. W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '02* (s. 93–106). Katowice: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach.

Dudzińska-Baryła, R., Kopańska-Bródka, D., Michalska, E. (2015). Analiza portfeli narożnych z uwzględnieniem skośności. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego*, *862. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, *75*, 123–133.

Guidolin, M., Timmermann, A. (2008). International Asset Allocation under Regime Switching, Skew, and Kurtosis Preferences. *Review of Financial Studies*, *21*, 889–935.

Haugen, R.A. (1996). *Teoria nowoczesnego inwestowania*. Warszawa: WIG-Press.

Kane, A. (1982). Skewness Preference and Portfolio Choice. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *17*, 15–25.

Kemalbay, G., Özkut, C.M., Franko, C. (2011). Portfolio Selection with Higher Moments: A Polynomial Goal Programming Approach to ISE-30 Index. *Ekonometri ve İstatistik Sayı*, *13*, 41–61.

Kim, W.Ch., Fabozzi, F.J., Cheridito, P., Fox, Ch. (2014). Controlling Portfolio Skewness and Kurtosis Without Directly Optimizing Third and Fourth Moments. *Economic Letters*, *122*, 154–158.

Konno, H., Shirakawa, H., Yamazaki, H. (1993). A Mean-absolute Deviation-skewness Portfolio Optimization Model. *Annals of Operations Research*, *45*, 205–220.

Kopańska-Bródka, D. (red.) (2004). *Wybrane problemy ilościowej analizy portfeli akcji*. Katowice: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach.

Kopańska-Bródka, D. (2014). Optymalny portfel inwestycyjny z kryterium maksymalnej skośności. *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, *208*, 46–58.

Lai, T. (1991). Portfolio Selection with Skewness: A Multi-Objective Approach. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, *1*, 293–305.

Li, X., Qin, Z., Kar, S. (2010). Mean-variance-skewness Model for Portfolio Selection with Fuzzy Returns. *European Journal of Operational Research*, *202*, 239–247.

Malevergne, Y., Sornette, D. (2005). Higher-Moment Portfolio Theory. *Journal of Portfolio Management*, *31*, 49–55.

Nguyen, T.T., Chen, J.T., Gupta, A.K. (2003). A proof of the conjecture on positive skewness of generalised inverse Gaussian distributions. *Biometrika*, *90* (1), 245–250.

Piasecki, K., Tomasik, E. (2013). *Rozkład stóp zwrotu z instrumentów polskiego rynku kapitałowego*. Kraków–Warszawa: edu-Libri.

Proelss, J., Schweizer, D. (2014). Polynomial Goal Programming and the Implicit Higher Moment Preferences of US Institutional Investors in Hedge Funds. *Financial Markets and Portfolio Management*, *28*, 1–28.

Sharpe, W.F. (2000). *Macro-Investment Analysis: Optimization. The Critical Line Method*. Pobrano z: http://web.stanford.edu/~wfsharpe/mia/opt/mia_opt3.htm (12.03.2016).

Simonson, D. (1972). The Speculative Behavior of Mutual Funds. *Journal of Finance*, *27*, 381–391.

Xiong, J.X., Idzorek, T.M. (2011). The Impact of Skewness and Fat Tails on the Asset Allocation Decision. *Financial Analysts Journal*, *67*, 23–35.

THE STRUCTURE OF EFICIENT PORTFOLIOS IN MEAN-VARIANCE-SKEWNESS MODELS

Abstract: *Purpose* **–** The distributions of rates of return observed in the investment practice are asymmetric, so the models which take into account only the mean and variance lack important features of portfolios. The aim of this paper is to analyse the degree of portfolio diversification, considering additional criterion of maximisation of the third central moment as a measure of skewness.

Design/Methodology/approach **–** In this paper we analyse the subsets of efficient portfolios which have the same structure. Using additional criterion of maximisation of the third central moment we determine the optimal portfolios having the same degree of diversification. In our research we analyse portfolios of stocks listed on Warsaw Stock Exchange.

Findings – We show that consideration of skewness in the efficient portfolio analysis changes the structure of optimal portfolios significantly. The greater the strength of preferences for skewness the lower the degree of portfolio diversification.

Originality/Value – We propose a three-criteria optimal portfolio selection model which maximises the expected value and skewness and minimises the variance. Parametric analysis of the level of diversification allows us to study the stability of the structure of optimal portfolios in relation to the investor preferences regarding the expected return and skewness.

Keywords: skewness, diversification, efficient frontier

Cytowanie

Dudzińska-Baryła, R., Kopańska-Bródka, D., Michalska, E. (2017). Struktura portfeli efektywnych w modelach średnia-wariancja-skośność. *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, *2* (86), 185–196. DOI: 10.18276/frfu.2017.86-15.