

## **Wycena asymetrycznych opcji potęgowych – nowe podejście oparte na transformacie Fouriera**

**Arkadiusz Orzechowski\***

**Streszczenie:** Celem niniejszego artykułu jest porównanie trzech sposobów wyceny asymetrycznych opcji potęgowych przy utrzymaniu założeń modelu F. Blacka i M. Scholesa: podejścia martyngałowego oraz dwóch koncepcji bazujących na transformacie Fouriera (w tym jednej autorskiej). Metodologia przeprowadzonych badań polega na porównaniu efektywności obliczeniowej każdego z uwzględnionych podejść. W ramach podejmowanych działań analizie poddawana jest szybkość oraz dokładność obliczeniowa opisanych metod określenia wartości teoretycznych analizowanego rodzaju instrumentów pochodnych. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że obie koncepcje bazujące na transformacie Fouriera generują ceny modelowe wolniej, niż podejście martyngałowe i są obciążone błędem. Pomimo tego, nie można ich uznać za jednoznacznie gorsze od podejścia martyngałowego, gdyż jako jedyne stwarzają możliwość wyceny opcji, w tym również asymetrycznych opcji potęgowych, w modelach najlepiej odzwierciedlających rzeczywiste funkcjonowanie rynków finansowych, tj. modelach stochastycznej zmienności. Za największą wartość dodaną przedkładanego opracowania należy uznać możliwość aplikacji autorskiej metody bazującej na transformacie Fouriera do wyceny asymetrycznych opcji potęgowych oraz analizę jej szybkości i dokładności obliczeniowej.

**Słowa kluczowe:** asymetryczne opcje potęgowe, transformata Fouriera, model Blacka-Scholesa

### **Wprowadzenie**

Opcje potęgowe są egzotycznymi instrumentami finansowymi, których funkcje wypłaty mają charakter nieliniowy i zależą od zwielokrotnionej ceny aktywa bazowego. Taka cecha analizowanych kontraktów ma dwie istotne implikacje dla uczestników rynku finansowego. Po pierwsze, kupujący i sprzedający prawa pochodne do aktywów bazowych mają większą elastyczność w kształtowaniu ryzyka, na które są wystawieni lub przed którym się zabezpieczają (w szczególnym przypadku strony transakcji mogą określić przepływy pieniężne w sposób właściwy dla opcji waniliowych). Po drugie, zajmujący długą lub krótką pozycję w opcjach potęgowych mają szansę podwyższenia lub obniżenia dźwigni finansowej, a w konsekwencji, zwiększenia możliwych zysków lub zmniejszenia potencjalnych strat wynikających z transakcji na rozpatrywanym segmencie rynku finansowego.

Dużą elastyczność opcji potęgowych należy uznać za główną przyczynę zwiększonego zainteresowania wyceną tego typu instrumentów przez podmioty zarówno indywidualne,

---

\* dr Arkadiusz Orzechowski, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, al. Niepodległości 162, 02-554 Warszawa, e-mail: aorzec@sgh.waw.pl.

jak i instytucjonalne (Macovschi, Quittard-Pinon, 2006). Zjawisku temu towarzyszy tendencja do tworzenia nowych, jeszcze bardziej egzotycznych opcji, w tym w szczególności:

- arytmetycznych azjatyckich opcji potęgowych (Schröder, 2013),
- geometrycznych azjatyckich opcji potęgowych (Prakasa Rao, 2016),
- barierowych opcji potęgowych (Cahyani, Sumarti, 2015),
- opcji potęgowych symetrycznych, jak i niesymetrycznych (Zhang, 1998, s. 597–603).

Na osobną uwagę zasługuje to, że metodologia wyceny opcji potęgowych opracowywana jest przy założeniach właściwych zarówno modelowi F. Blacka i M. Scholesa (1973), jak również alternatywnym podejściom uwzględniającym zjawiska odzwierciedlające rzeczywiste zachowanie cen aktywów na rynkach finansowych, w tym m.in.:

- występowanie skoków cenowych będących konsekwencją pojawiania się nowych informacji, czy też występowania zdarzeń o charakterze katastroficznym (Pan, 2002; Chernov i in., 2002; Eraker, 2004),
- braku normalności rozkładów logarytmicznych stóp zwrotu, nadmiernej kurtozy oraz istnienia zjawiska „grubych ogonów” w rozkładach stóp zwrotu (Cont, 2001),
- fraktalnego charakteru zmian cenowych na rynkach stóp procentowych oraz aktywów o charakterze udziałowym (Peters, 1989).

Rozpoznanie powyższych nieprawidłowości skutkowało koniecznością opracowania alternatywnych modeli wyceny opcji, w tym również opcji potęgowych. Zaliczyć do nich należy w szczególności modele uwzględniające skoki cenowe aktywów bazowych (Xiao i in., 2010) oraz modele stochastycznej zmienności (Heston, 1993).

Głównym celem przedkładanego artykułu jest porównanie dwóch sposobów wyceny asymetrycznych opcji potęgowych typu europejskiego z nową koncepcją o charakterze autorskim bazującą na transformacie Fouriera.

W ramach podejmowanej problematyki najpierw prezentowane jest podejście F. Blacka i M. Scholesa (wyprowadzane przy wykorzystaniu metody martyngałowej) do wyceny będących przedmiotem zainteresowania kontraktów. Następnie, omawiany rodzaj pochodnych instrumentów finansowych wyceniany jest przy pomocy dwóch modeli bazujących na transformacie Fouriera (w tym jednego autorskiego). Ostatecznie, analizie poddawana jest dokładność i szybkość obliczeniowa każdego z podejść oraz wyciągane są wnioski na temat możliwości wykorzystania uwzględnionych koncepcji w praktyce.

## **1. Podejście F. Blacka i M. Scholesa do wyceny opcji potęgowych**

W literaturze przedmiotu (Zhang, 1998, s. 597–603) wyróżnia się dwa rodzaje opcji potęgowych – asymetryczne i symetryczne. W przypadku pierwszego rodzaju instrumentów finansowych bazujących na prawach pochodnych ceny aktywa bazowego w momencie wygaśnięcia kontraktu, jak i rozliczenia, są podnoszone do pewnej potęgi. W konsekwencji funkcja wypłaty w przypadku tego typu kontraktów (dla opcji kupna) jest obliczana jako

wartość oczekiwana różnicy pomiędzy obiema wielkościami zdyskontowana na moment obecny względem pewnej miary martyngałowej. Przedstawia to wzór (1).

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}} \left( (S_T^n - K^n, 0)^+ | \mathcal{F}_0 \right) \quad (1)$$

gdzie:  $S_0$  i  $S_T$  to wartości rynkowe aktywa bazowego odpowiednio w momentach wystawienia oraz wygaśnięcia opcji,  $r$  jest stopą procentową, która nie jest zależna od czasu pozostającego do wygaśnięcia kontraktu,  $e^{-rT}$  to czynnik dyskontujący strumień płatności na moment wystawienia opcji,  $E^{\mathbb{Q}}$  jest operatorem wartości oczekiwanej względnej miary martyngałowej  $\mathbb{Q}$ ,  $n$  to dowolna skończona potęga, zaś  $\mathcal{F}_0$  jest filtracją, czyli historią cenową aktywa bazowego do momentu przeprowadzenia wyceny.

Stosując te same oznaczenia jak poprzednio łatwo można zdefiniować funkcję wypłaty drugiego rodzaju opcji potęgowych, czyli opcji symetrycznych. W tym przypadku wykorzystywana jest następująca formuła:

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}} \left( ((S_T - K)^n, 0)^+ | \mathcal{F}_0 \right) \quad (2)$$

Ograniczając dalszą analizę wyłącznie do asymetrycznych kontraktów bazujących na prawach pochodnych można stwierdzić, że:

$$C(S_0, 0) = E^{\mathbb{Q}} \left( e^{-rT} S_T^n 1_{\{S_T > K\}} \right) - e^{-rT} K^n E^{\mathbb{Q}} \left( 1_{\{S_T > K\}} \right) \quad (3)$$

Wykorzystując pochodną Radona-Nikodyma do zamiany miar martyngałowych dla odjemnej z równania (3) (Dufrense i in., 1996) oraz stosując *lemat Itô* dla funkcji opisującej cenę aktywa bazowego podniesioną do potęgi  $n$  niemalże od razu można stwierdzić, że cena teoretyczna asymetrycznych opcji potęgowych powinna być obliczana zgodnie ze wzorem (4) (metoda oznaczana dalej jako BS):

$$C(S_0, 0) = S_0^n e^{(n-1)rT + (n^2-n)\frac{1}{2}\sigma^2 T} \mathcal{N}(d_1) - K^n e^{-rT} \mathcal{N}(d_2) \quad (4)$$

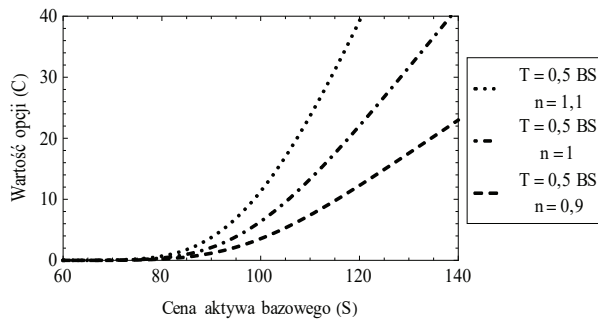
gdzie:  $\mathcal{N}(\cdot)$  jest dystrybuantą wystandaryzowanego rozkładu normalnego z parametrami  $d_1$  i  $d_2$  opisanymi za pomocą następujących wzorów:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + n\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (6)$$

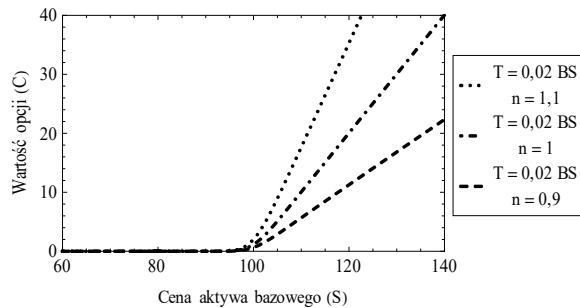
Wykorzystując formuły (4–6) łatwo można wyznaczyć funkcje wypłat asymetrycznych opcji potęgowych typu europejskiego w relacji do funkcji wypłat europejskich opcji

waniliowych. Poszczególne funkcje wyceny asymetrycznych opcji potęgowych, przy cenie aktywa bazowego zmieniającej się od 60 do 140, odchyleniu standardowym rentowności waloru, na który opiewa opcja wynoszącym 20%, stopie zwrotu wolnej od ryzyka na poziomie 3%, poziomie rozliczenia równym 100 oraz różnych zarówno okresach pozostających do wykupu, jak i wartościach  $n$ , przedstawiają rysunki 1 i 2.



**Rysunek 1.** Funkcje wypłaty asymetrycznej opcji potęgowej przy  $T = 0,5$  dla różnych wartości  $n$ .

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 2.** Funkcje wypłaty asymetrycznej opcji potęgowej przy  $T = 0,02$  dla różnych wartości  $n$ .

Źródło: opracowanie własne.

Na ich podstawie można sformułować kilka prawidłowości dotyczących asymetrycznych opcji potęgowych, np.:

- funkcja wypłaty opcji waniliowej jest szczególnym przypadkiem funkcji wypłaty asymetrycznej opcji potęgowej;
- im wyższa potęga w analizowanym rodzaju kontraktów opcyjnych, tym wyższa jest strata lub większy jest zysk na skutek niekorzystnej/korzystnej zmiany ceny rynkowej aktywa bazowego;

- c) wraz ze wzrostem  $n$  rośnie poziom dźwigni finansowej, co oznacza możliwość osiągnięcia ponadprzeciętnie wysokich stóp zwrotu (np. przez kupującego opcję kupna) lub niskich stóp zwrotu (np. przez sprzedającego opcję sprzedaży) na skutek odpowiednio wzrostu lub spadku poziomu notowań aktywów bazowych.

## 2. Wycena opcji potęgowych przy wykorzystaniu transformaty Fouriera

Jedną z alternatywnych metod wyceny asymetrycznych opcji potęgowych typu europejskiego jest metoda G. Bakshi i D. Madana (2000) (dalej oznaczana jako FT-BM). Procedura wykorzystana przez nich do wyceny analizowanych kontraktów opcyjnych ma charakter wieloetapowy.

Na początku, ceny rynkowe aktywa bazowego oraz rozliczenia przekształcane są do wartości logarytmicznych, tj.  $\log S_T = s_T$  oraz  $\log K = k$ . W konsekwencji, otrzymywana jest funkcja wypłaty, którą można zapisać w następujący sposób:

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \int_k^\infty (e^{ns_T} - e^{nk}) \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T \quad (7)$$

gdzie:  $\mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0)$  jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej  $s_T$  przy filtracji  $\mathcal{F}_0$ . Warto zwrócić uwagę, że  $\mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0)$  wyznaczana jest dla ścieżki cenowej aktywa bazowego, którego wartość rynkowa podniesiona jest do potęgi  $n$ .

W następnym etapie podejmowanych działań całka z równania (7) rozbijana jest na dwie części, tj.:

$$C(S_0, 0) = e^{-rT} \int_k^\infty e^{ns_T} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T - e^{-rT} \int_k^\infty e^{nk} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T = I_1 - I_2 \quad (8)$$

Dla każdej z nich, tj. zarówno dla  $I_1$  i  $I_2$ , w formule (8) obliczana jest transformata Fouriera, tj.:

$$\begin{aligned} FT_T^1(\xi) &= \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi k} \left[ e^{-rT} \int_k^\infty e^{ns_T} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T \right] dk = \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi k} \left[ e^{-rT} \frac{\int_k^\infty e^{ns_T} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T}{\int_{-\infty}^\infty e^{ns_T} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T} \int_{-\infty}^\infty e^{ns_T} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T \right] dk \end{aligned} \quad (9)$$

Kluczowym elementem dalszej analizy jest spostrzeżenie stanowiące, iż  $\int_{-\infty}^\infty e^{ns_T} \mathbb{Q}(s_T | \mathcal{F}_0) ds_T$  może być traktowana jak funkcja charakterystyczna wyznaczana dla zmiennej  $s_T$  przy  $\xi = -in$ , tj.  $\phi(-in)$ . Jednocześnie, całka ta może opisywać wartość oczekiwaną zmiennej  $S_T^n$ , tj.  $E(S_T^n)$ , która wyrażona jest następującym wzorem:

$$E(S_T^n) = S_0^n e^{nT - \frac{1}{2}n\sigma^2 T + \frac{1}{2}n^2\sigma^2 T} \quad (10)$$

W wyniku podjętych działań formułę (9) można przekształcić do następującej postaci:

$$FT_T^1(\xi) = \frac{e^{-rT} E(S_T^n) \phi(\xi - in)}{i\xi \phi(-in)} \quad (11)$$

Zbliżona procedura transformacji przeprowadzana jest w stosunku do  $I_2$ . Pozwala to określić  $FT_T^2(\xi)$  jako:

$$FT_T^2(\xi) = K^n e^{-rT} \frac{\phi(\xi)}{i\xi} \quad (12)$$

Ostatecznie, obliczane są odwrotne transformaty Fouriera, co pozwala określić wartość modelową asymetrycznych opcji potęgowych typu europejskiego w modelu G. Bakshi i D. Madana przy zachowaniu prawdziwości założeń F. Blacka i M. Scholesa, tj.:

$$C(S_0, 0) = S_0^n e^{(n-1)rT + (n^2-n)\frac{1}{2}\sigma^2 T} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi - in)}{i\xi \phi(-in)} \right] d\xi \right) - K^n e^{-rT} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi)}{i\xi} \right] d\xi \right) \quad (13)$$

Łatwo zauważyć, iż wzór (13) można w prosty sposób zmodyfikować tak, aby pozbyć się zasadniczych jego wad, tj. konieczności obliczania dwóch transformat Fouriera i ich numerycznego odwracania. Stosując tę samą procedurę w odniesieniu do  $I_1$  oraz modyfikując sposób postępowania w przypadku  $I_2$  można znacząco usprawnić wyznaczanie wartości teoretycznych asymetrycznych opcji potęgowych typu europejskiego.

W ramach autorskiego podejścia (dalej oznaczanego jako FT-New), przy wyznaczaniu transformaty Fouriera dla  $I_2$  zmienna opisująca logarytm naturalny ceny rozliczenia  $K$  włączana jest do funkcji podcałkowej. Bezpośrednią tego konsekwencją jest przekształcenie formuły (12) do następującej postaci:

$$FT_T^2(\xi) = e^{-rT} \frac{\phi(\xi - in)}{i\xi + n} \quad (14)$$

Ostatecznie, powielając procedurę obliczania odwrotnych transformat Fouriera można stwierdzić, że istnieje alternatywny sposób obliczania wartości modelowych asymetrycznych opcji potęgowych typu europejskiego. Do tego celu wykorzystywany jest wzór (15):

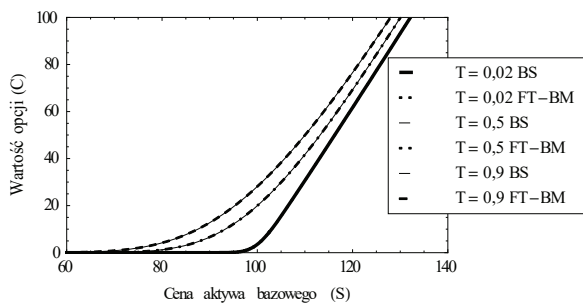
$$C(S_0, 0) = \frac{1}{2} S_0^n e^{(n-1)rT + (n^2-n)\frac{1}{2}\sigma^2 T} + \frac{e^{-rT}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[ \frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi - in) n}{i\xi n - \xi^2} \right] d\xi \quad (15)$$

Analizując formułę (15) łatwo zauważyć, iż do wyznaczenia cen asymetrycznych opcji potęgowych potrzebna jest znajomość tylko jednej funkcji charakterystycznej zmiennej  $s_T$ . Oznacza to jednocześnie potrzebę tylko jednokrotnego numerycznego obliczenia odwrotnej transformaty Fouriera. Właściwość taka wpływa na usprawnienie procesu wyznaczania wartości teoretycznych analizowanych instrumentów finansowych i powoduje, że FT-New należy uznać za lepszą metodę określania cen modelowych asymetrycznych opcji potęgowych, niż FT-BM. Tak sformułowany wniosek znajduje potwierdzenie zarówno w dokładności, jak i szybkości obliczeniowej nowo opracowanego podejścia.

### 3. Dokładność i szybkość obliczeniowa wyceny asymetrycznych opcji potęgowych

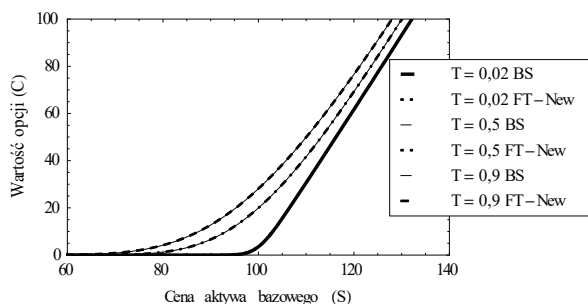
W celu dokładniejszego przeanalizowania dokładności i szybkości obliczeniowej wyceny asymetrycznych opcji potęgowych warto najpierw prześledzić przebieg funkcji wypłat otrzymywanych każdą z uwzględnionych metod w relacji do cen modelowych generowanych w ramach podejścia BS, a następnie wyznaczyć czas potrzebny do przeprowadzenia procesu wyceny.

Na podstawie rysunków 3 i 4 można wywnioskować, że formuły (4), (13) i (15) generują zbliżone wartości opcji w przypadku asymetrycznych kontraktów potęgowych opartych na prawach pochodnych. Ewentualne rozbieżności w wycenie rozpatrywanych kontraktów są niewielkie i wynikają z tego, iż w przypadku dwóch ostatnich metod wyceny występuje konieczność numerycznego odwrócenia transformat Fouriera. Powstające na skutek tego odchylenia nie są na tyle znaczące, aby mogły być źródłem poglądu o istnieniu różnic niekształcających wycenę asymetrycznych opcji potęgowych.



**Rysunek 3.** Funkcje wypłaty asymetrycznej opcji potęgowej wycenionej metodami BS i FT-BM dla  $n = 1,2$

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 4.** Funkcje wypłaty asymetrycznej opcji potęgowej wycenionej metodami BS i FT-New  $n = 1,2$

Źródło: opracowanie własne.

W celu potwierdzenia zgodności generowanych wartości teoretycznych przez podejścia BS, FT-BM i FT-New wyznaczany jest przebieg funkcji wypłat obu metod opartych na transformacji Fouriera w relacji do metody BS. W obu przypadkach przyjmowane są jednakowe dane wejściowe do obliczeń, tzn. ceny asymetrycznych opcji potęgowych w obu przypadkach obliczane są przy założeniu, że poziom rozliczenia wynosi 100, zmienność kursów aktywów bazowych równa się 20%, stopa zwrotu wolna od ryzyka przyjmuje wartość 3% zaś  $n$  równa się 1,2.

Znajomość formuł na wycenę asymetrycznych opcji potęgowych pozwala również dokonać pomiaru szybkości generowania wartości teoretycznych kontraktów w ramach każdego z uwzględnionych podejść. Zakładając jednakowe dane wejściowe (tak, jak w części 3), stosunkowo łatwo można opracować kody pozwalające określić czas, jaki jest potrzebny do wyznaczenia wartości teoretycznych analizowanych kontraktów. Dokonanie stosownych obliczeń w pakiecie Mathematica 8.0 uruchamianym na komputerze z procesorem Intel i5-4210U CPU @ 1,70 GHz posiadającym pamięć RAM równą 6 GB pozwala wygenerować wyniki zgodne z tymi, które przedstawia tabela 1. Ważnym elementem podejmowanych działań jest każdorazowe kasowanie pamięci podręcznej cache w celu wymuszenia przetwarzania pliku na nowo przez komputer dla każdego z uwzględnionych okresów pozostających do wykupu.

**Tabela 1**

Szybkość generowania cen teoretycznych asymetrycznych opcji potęgowych w sekundach

	OTM ( $S_T = 90$ )	ATM ( $S_T = 100$ )	ITM ( $S_T = 110$ )
BS	0	0	0
FT-BM	0,078	0,047	0,047
FT-New	0,032	0,031	0,031

Źródło: opracowanie własne.



Na podstawie wyników zawartych w tabeli 1 można jednoznacznie stwierdzić, iż metoda BS pozwala najszybciej wygenerować wyniki końcowe niezależnie od tego, czy opcje są out-of-the-money (OTM), at-the-money (ATM), czy in-the-money (ITM). Wynika to z tego, że BS, jako jedyne z analizowanych podejść, ma charakter analityczny. Następną pod względem szybkości obliczeniowej jest metoda FT-New, zaś za najwolniejszą należy uznać koncepcję FT-BM. Wydaje się to być zgodne z oczekiwaniami. Łatwo jest bowiem zauważyć, że w przypadku FT-BM, opisanej formułą (13), pojawia się konieczność wyznaczenia trzech funkcji charakterystycznych zmiennej  $s_T$  (w rzeczywistości liczbę tę można ograniczyć do dwóch) oraz dwukrotnego obliczenia odwrotnej transformaty Fouriera. Inaczej sytuacja przedstawia się w przypadku koncepcji FT-New opisanej wzorem (15), w której wycena asymetrycznych opcji potęgowych wiąże się z koniecznością określenia jednej funkcji charakterystycznej i jednorazowego obliczenia odwrotnej transformaty Fouriera. Nie bez znaczenia jest również to, iż w mianowniku równania (15)  $\xi$  podniesiona jest do kwadratu. Poprawia to zbieżność podejścia FT-New do metody BS oraz wpływa na zwiększenie szybkości obliczeniowej w stosunku do koncepcji FT-BM.

## Uwagi końcowe

Asymetryczne opcje potęgowe można wycenić wieloma metodami. Poza podejściami, które należy uznać za tradycyjne, tj. podejścia martyngałowe i bazujące na rozwiązaniu równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu, na szczególną uwagę zasługują sposoby wyceny przedmiotowych kontraktów bazujące na transformacie Fouriera.

Spośród dwóch uwzględnionych koncepcji tego typu, które pozwalają określić wartość teoretyczną asymetrycznych opcji potęgowych, lepszą okazuje się być metoda FT-New. Dowodzi tego z jednej strony zbliżona do FT-BM zbieżność autorskiej koncepcji do modelu BS, z drugiej zaś większa szybkość obliczeniowa nowo opracowanego sposobu wyznaczania wartości teoretycznych rozpatrywanych instrumentów pochodnych.

Warto zauważyć, iż prezentowana koncepcja ma charakter uniwersalny. Oznacza to, że może być ona stosowana do innych modeli wyceny opcji, w tym modeli skokowo-dyfuzyjnych (Kou, 2002), czysto skokowych (Madan et al., 1998) oraz stochastycznej zmienności (Heston, 1993). Ponadto, po uwzględnieniu funkcji wypłat właściwych poszczególnym kontraktom bazującym na prawach pochodnych, formułę (15) można zastosować do wyceny praktycznie każdej opcji.

## Literatura

- Black, F., Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 3 (81), 637–654. DOI: 10.1086/260062.
- Bakshi, G., Madan, D. (2000). Spanning and derivative – security valuation. *Journal of Financial Economics* 2 (55), 205–238. DOI: 10.1016/S0304-405X(99)00050-1.

- Cahyani, A.C.P., Sumarti, N. (2015). Implementation of power barrier option valuation. *AIP Conference Proceedings*, 1 (1677), 1–4. DOI: 10.1063/1.4930640.
- Chernov, M., Gallant, A., Ghysels, E., Tauchen, G. (2001). Alternative models of stock prices dynamics. *Journal of Econometrics* 1–2 (116), 225–257. DOI: 10.1016/S0304-4076(03)00108-8.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1 (2), 223–236. DOI: 10.1088/1469-7688/1/2/304.
- Dufrense, P.C., Keirstead, W. Ross, M.P. (1996). Pricing derivatives the martingale way. Retrieved from: [www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/rp/279.pdf](http://www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/rp/279.pdf).
- Eraker, B. (2004). Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices. *Journal of Finance* 3 (59), 1367–1403. DOI: 10.1111/j.1540-6261.2004.00666.x.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 2 (6), 327–343. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327.
- Kou, S. (2002). Jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 8 (48), 1086–1101. DOI: 10.1287/mnsc.48.8.1086.166.
- Macovschi, S., Quittard-Pinon, F. (2006). On the pricing of power and other polynomial options. *Journal of Derivatives*, 4 (13), 61–71. DOI: 10.3905/jod.2006.635421.
- Madan, D., Carr, P., Chang, E. (1998). The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review* 1 (2), 79–105. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009703431535>.
- Pan, J. (2002). The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study. *Journal of Financial Economics* 1 (63), 3–50. DOI: 10.1016/S0304-405X(01)00088-5.
- Peters, E. (1989). Fractal structure in the capital markets, *Financial Analysts Journal*, 4 (45), 32–37, DOI: <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v45.n4.32>.
- Prakasa Rao, B.L.S. (2016). Pricing geometric Asian power options under mixed fractional Brownian motion environment. *Physica A. Statistical Mechanics and its Applications*, 15 (446), 92–99. DOI: 10.1016/j.physa.2015.11.013.
- Schröder, M. (2013). On arithmetic-average Asian power options: closed forms and explicit methods for valuation. *Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, 1 (66), 1–27. DOI: 10.1093/qjmam/hbs017.
- Xiao, W.L., Zhang, W.G., Zhang X.L., Wang, Y.L. (2010). Pricing currency options in a fractional Brownian motion with jumps. *Economic Modelling*, 5 (27), 935–942, DOI: 10.1016/j.econmod.2010.05.010.
- Zhang, P.G. (1998). *Exotic options. A guide to second generation options* (2nd ed.). Singapore: World Scientific Publishing.

## PRICING ASYMMETRIC POWER OPTIONS – NEW METHOD BASED ON THE FOURIER TRANSFORM

**Abstract:** The purpose of this article is to compare three ways of evaluating asymmetric power options in the Black-Scholes framework: martingale approach and two concepts based on the Fourier transform (including one derived by the author of the article). The methodology of the conducted research is based on comparing computational efficiency of every approach to pricing asymmetric power options. As a part of the subject matter, speed and accuracy of three methods of pricing options is analyzed. Based on the obtained results, it can be concluded that both Fourier-based approaches generate theoretical prices of the options slower than in the martingale method. Moreover, Fourier-based methods are error-prone. In spite of this, they can not be considered to be unequivocally worse than the martingale approach, as they offer possibility of pricing options, including asymmetric power options, in models that best reflect the real market conditions, i.e. the stochastic volatility models. The greatest value of the submitted paper is a possibility of applying the author's method of pricing asymmetric power options and analysis of its speed and computational accuracy.

**Keywords:** asymmetric power options, Fourier transform, Black-Scholes model

## Cytowanie

Orzechowski, A. (2017). Wycena asymetrycznych opcji potęgowych – nowe podejście oparte na transformacie Fouriera. *Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia*, 5 (89/2), 439–448. DOI: 10.18276/frfu.2017.89/2-36.