



Dorota Bród

Politechnika Rzeszowska, Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
email: dorotab@prz.edu.pl

Piotr Rachwał

Katolicki Uniwersytet Lubelski, Wydział Humanistyczny
email: piotrach@kul.lublin.pl

Paweł Strzelecki

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Kolegium Analiz Ekonomicznych
email: pstrzell@sgh.waw.pl

Projekcja odwrócona (*inverse projection*) jako narzędzie wspomagające poznanie przeszłości demograficznej*

Inverse Projection as a Tool That Supports Understanding Demographic Past

Abstrakt

W artykule postawiono dwa główne cele. Po pierwsze, prezentację założeń teoretycznych oraz techniki obliczeń stosowanych w projekcji odwróconej (*inverse projection*). Metoda, szerzej znana w angielskiej literaturze przedmiotu, zaproponowana w latach 70. XX wieku przez Ronalda D. Lee i rozwijana m.in. w kręgu

Abstract

There are two aims in the article; firstly, to present the theoretical assumptions and the calculation techniques used in inverse projection. The method, widely known in the Anglo-Saxon literature, created in the 1970s by Ronald D. Lee and developed by members of the so-called Cambridge Group has not been

* Przygotowanie opracowania sfinansowano w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą „Narodowy Program Rozwoju Humanistyki” w latach 2012–2017, projekt: *Ludność historycznego powiatu lubelskiego w latach 1582 (1594)–1900 w świetle rejestracji metrykalnej*.

badaczy Cambridge Group nie doczekała się jeszcze pełniejszego omówienia ani też zastosowania, na gruncie polskich badań demograficznych. Drugi cel badań ma wymiar praktyczny i polega na przeprowadzeniu symulacji potwierdzających elastyczność w doborze parametrów początkowych konstruowanych modeli populacji.

yet comprehensively discussed or applied by Polish demographers. The second aim is practical and consists in carrying out simulations confirming the flexibility while choosing the initial parameters of the models of populations that are being constructed.

Problematyka badań demograficzno-historycznych oraz specyfika źródeł stanowiących ich podstawę determinują wybór metod badawczych. W obszarze badań nad ruchem naturalnym ludności powszechnie wykorzystuje się metodę agregatywną oraz rekonstrukcji rodzin (nominatywną). Ta pierwsza posługuje się zbiorczymi danymi o liczbie urodzeń, małżeństw i zgonów. Pozwala na uchwycenie dynamiki zmian zachodzących w ruchu naturalnym, określeniu wahań sezonowych i wyznaczeniu trendów, zazwyczaj w długich odcinkach czasu¹. Otrzymane dane nabierają szczególnej wartości, jeśli zostaną skorelowane z wiedzą na temat procesów zachodzących w gospodarce, życiu politycznym i społecznym.

Druga droga to wspomniana rekonstrukcja rodzin. W latach 50. XX wieku udoskonalili ją i szczegółowo opisał, w pionierskim studium o normandzkiej parafii Crulai, Louis Henry. Technika postępowania polega na rekonstrukcji dziejów demograficznych rodzin poprzez przyporządkowanie parom małżeńskim wszystkich zdarzeń demograficznych ich dotyczących². W efekcie pozwala to na szczegółowy opis procesów demograficznych charakteryzujących badaną społeczność: rzeczywistego wieku małżonków w momencie ślubu, długości trwania związków małżeńskich, wielkości rodziny, płodności kobiet i wielu innych.

¹ Więcej o miernikach otrzymywanych na drodze analizy metodą agregatywną: Cezary Kukło, *Demografia Rzeczypospolitej przedrozbiorowej* (Warszawa: Wydawnictwo DiG, 2009), 156–174. Tam też wskazówki metodologiczne i bogata literatura przedmiotu.

² Etienne Gautier, Louis Henry, „Crulai. Démographie d'une paroisse normande au XVIIe et au XVIIIe siècles. Présentation d'un cahier de l'I.N.E.D”, *Population* 13 (1958), 2: 283–286; Mieczysław Kędelski, Jan Paradysz, *Demografia* (Poznań: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 2006), 208–209. Cenne uwagi o wcześniejszym wykorzystaniu metody nominatywnej, także na gruncie badań polskich: Kukło, *Demografia*, 175. Ze względu na wszechstronność analiz stosunkowo najbardziej znana jest rekonstrukcja zmian demograficznych w wiejskiej parafii Bejsce: Edmund Piasecki, *Ludność parafii bejskiej (woj. kieleckie) w świetle ksiąg metrykalnych z XVIII–XX w.: studium demograficzne* (Warszawa: PWN, 1990). Zob. też monumentalną pracę autorów skupionych w „Cambridge Group for the History of Population and Social Structure”: Edward Anthony Wrigley, R.S. Davies, James E. Oeppen, Roger S. Schofield, *English Population History from Family Reconstitution 1580–1837* (Cambridge–New York: Cambridge University Press, 1997).

Otrzymanie tak szczegółowych charakterystyk badanej populacji okupione jest jednak zawsze mozolnym procesem rekonstrukcji, który wymaga znacznych nakładów pracy i czasu³. Istotny wydaje się fakt, że efekty tych badań nie zawsze spełniają wymogi reprezentatywności⁴.

W praktyce możliwości metodyczne zmuszają badacza do wyboru jednej z wyżej wymienionych dróg poznania: szczegółowej analizy procesów demograficznych, odnoszących się z reguły do niewielkich zbiorowości i krótkiego spektrum czasowego lub ujęcia bardziej ogólnego, ograniczonego w poznaniu do surowych współczynników demograficznych, jednak w długiej perspektywie czasowej. Celem niniejszego artykułu jest omówienie alternatywnej drogi postępowania – projekcji odwróconej. Jej pomysłodawcą jest Ronald D. Lee, który pod koniec lat 60. XX wieku, w dysertacji poświęconej wpływowi szeroko rozumianych czynników ekonomicznych na przemiany demograficzne w preindustrialnej Anglii, omówił główne założenia metody⁵. W kolejnych publikacjach ten sam autor dokonał kilku modyfikacji i rozszerzeń⁶. Od tamtego czasu ukazało się przynajmniej kilkanaście artykułów i obszerniejszych prac, wykorzystujących logikę postępowania zaproponowaną przez R.D. Lee. Pojawiły się także kolejne modyfikacje metody, które – wraz z rosnącymi możliwościami obliczeniowymi komputerów – przyjęły wyrafinowane formy analiz demograficznych⁷. Projekcja odwrócona nie została jak dotąd wykorzystana w polskich badaniach demograficzno-historycznych⁸, warto jednak przywołać dorobek polskich badaczy, których prace okazują się cennym uzupełnieniem wiedzy pozwalającej m.in. na lepsze rozumienie i praktyczne użycie modelowych tablic trwania życia. Stanisław

³ Badania tego typu stanowią wciąż niewielką część dorobku polskiej i światowej demografii. Zob. opinię na ten temat: Cezary Kukło, „Polska demografia przeszłości u progu XXI wieku”, *Przeszość Demograficzna Polski* (dalej *PDP*) 22 (2001): 30.

⁴ Surowe kryteria doboru materiału źródłowego skutkują wykorzystaniem tylko części zarejestrowanych faktów ruchu naturalnego, w analizie pomijane są osoby pozostające poza strukturą rodziny, a specyfika badań predysponuje do eksploracji mniejszych jednostek osadniczych.

⁵ Ronald D. Lee, *Econometric Studies of Topics in Demographic History* (niepubl., 1970).

⁶ W 1974 r. opublikował artykuł, w którym przedstawił nieco zmodyfikowaną, w stosunku do wcześniejszej dysertacji, wersję metody. Ukazując jej praktyczne zastosowanie, wykorzystał dane ludnościowe z angielskiej parafii Colyton, poddanej wcześniej przez E.A. Wrigleya badaniom nominatywnym, otrzymując zbieżne, w pełni satysfakcjonujące wyniki. Ronald D. Lee, „Estimating Series of Vital Rates and age Structure from Baptisms and Burials: A New Technique, with Applications to Pre-industrial England”, *Population Studies* (dalej: *PS*) 28 (1974), 3: 495–512. Zob. też: Ronald D. Lee, „Inverse Projection and Back Projection: A Critical Appraisal and Comparative Results for England”, *PS* 39 (1985), 2: 233–248.

⁷ W latach 80. ubiegłego wieku Robert McCaa napisał program komputerowy, który pozwolił na zautomatyzowanie procesu obliczeniowego. Program ten powstał pierwotnie w wersji systemu operacyjnego DOS, ale doczekał się emulacji na system operacyjny Windows. Zob. Robert McCaa, „Populate: A Microcomputer Projection Package for Aggregative Data Applied to Norway, 1736–1970”, *Annales de Démographie Historique* 2 (1998): 287–298.

⁸ Wspomina o niej Cezary Kukło, zob. *Demografia*, 195–197.

Borowski zaprezentował w latach 70. XX wieku cenne ustalenia odnoszące się do populacji Dobrego Miasta w XVII wieku. Pracując na unikatowym materiale spisowym, uzupełnionym danymi z ksiąg metrykalnych, wykorzystując analizę kohortową, oszacował m.in. prawdopodobieństwo dalszego trwania życia noworodków, a także współczynnik reprodukcji brutto⁹. Także wykorzystanie modelowych tablic trwania życia do rekonstrukcji współczynników demograficznych w populacjach, dla których brakuje danych statystycznych, było już stosowane w publikacjach w języku polskim¹⁰. Model ludności ustabilizowanej, z którego początek biorą zarówno modelowe tablice trwania życia, jak i metoda opisywana w niniejszym artykule, należy zaś do najważniejszych zagadnień współczesnej demografii. Jego opis znaleźć można w wielu podręcznikach w języku polskim¹¹ oraz w rozszerzonej wersji w publikacjach dotyczących demografii matematycznej¹².

Poniżej zamieszczono dokładny opis metody, opierającej się na klasycznym algorytmie opracowanym przez R.D. Lee, który pozostaje do dzisiaj najprostszym, ale zarazem najmniej wymagającym pod względem dodatkowych założeń. Dla pełniejszego zrozumienia teoretycznych fundamentów projekcji odwróconej, wyjaśnienie procedury postępowania uzupełniono o matematyczny opis słabego twierdzenia ergodycznego (*weak ergodicity theory*) stanowiącego, według Kennetha Wachtera, kamień węgielny demografii formalnej¹³. Zważywszy, iż punkt poświęcony twierdzeniu ergodycznemu może stanowić wyzwanie dla części odbiorców – humanistów, przyzwyczajonych do mniej formalnych opisów – przed zasadniczym wywodem przypomniano podstawowe informacje na temat techniki działań na macierzach. Czytelnik, który uzna, że fundamenty leżące u podstaw projekcji odwróconej nie stanowią warunku *sine qua non* w zapoznaniu się z omawianą metodą, może przejść do dalszej części dyskursu – weryfikacji założeń projekcji odwróconej. Ostatnia część artykułu zawiera przykłady obliczeń, które potwierdzają wyżej opisane teoretyczne założenia projekcji odwróconej, ale

⁹ Stanisław Borowski, „Próba odtworzenia struktur społecznych i procesów demograficznych na Warmii u schyłku XVII w. na przykładzie Dobrego Miasta i okolicy”, *PDP* 8 (1975): 125–198.

¹⁰ Przykładem tego rodzaju zastosowania jest rekonstrukcja współczynników demograficznych dla Ghany, zawarta w publikacji: Jerzy Z. Holzer, *Model ludności ustabilizowanej* (Warszawa: SGPiS, 1969).

¹¹ Warto wymienić tu przywoływany już podręcznik: Kędelski, Paradysz, *Demografia*, 256–288, a także odnotować, że w bogatym dorobku naukowym wspomnianych badaczy-demografów są także prace poświęcone procesom demograficznym w przeszłości. Stanowią one dużą pomoc dla historyków zainteresowanych wykorzystaniem nowoczesnych metod analizy ilościowej populacji. Zob. też: Jolanta Kurkiewicz, red., *Procesy demograficzne i metody ich analizy* (Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, 2010), rozdz. 8.

¹² Janina Józwiak, *Matematyczne modele ludności* (Warszawa: SGPiS, 1985).

¹³ Kenneth W. Wachter, „Ergodicity and Inverse Projection”, *PS* 40 (1986): 275–287.

stanowią też punkt odniesienia dla weryfikacji samodzielnie przeprowadzonych obliczeń.

Metoda postępowania

Nazwa metody związana jest z techniką obliczania stosowaną przez demografów w projekcji ludności¹⁴, która została tu niejako „odwrócona”, przy czym chodzi tu o zmianę logiki postępowania, a nie o proste odwrócenie „czasowe” obliczeń¹⁵. Innymi słowy, klasyczna projekcja ludności, wykorzystując dane o współczynnikach płodności, zgonów i migracji, szacuje przyszłe wartości ruchu naturalnego oraz wędrownego i w oparciu o nie prognozuje pożądane parametry demograficzne. W przypadku projekcji odwróconej procedura polega na wykorzystaniu surowych danych ruchu naturalnego (urodzenia i zgonu) i wykorzystaniu ich do wyprowadzenia wskaźników demograficznych, a także odtworzenia stanu populacji i jej struktury wiekowej. W pierwszej, najprostszej, ale zarazem obciążonej najmniejszą liczbą dodatkowych założeń wersji metody, oprócz wspomnianych danych na temat zdarzeń ruchu naturalnego, potrzebne są informacje o liczbie i strukturze wieku populacji na początku badanego okresu. Uwzględniając fakt, że historyk rzadko dysponuje wiarygodnymi danymi o strukturze ludności w epoce przedstatystycznej, najczęściej oznacza to konieczność sięgnięcia do struktur wieku wyznaczanych za pomocą modelowych tablic trwania życia i założeń modelu ludności ustabilizowanej (*stable population*)¹⁶. Zakładamy więc, że struktura wieku ludności powinna być zbliżona do występującej w populacji, w której przez wiele lat występują te same współczynniki zgonów

¹⁴ Andrzej Balicki, *Analiza przeżycia i tablice wymieralności* (Warszawa: PWE, 2006).

¹⁵ Możliwe jest także przeprowadzenie całej procedury obliczeniowej, cofając się niejako w czasie, czyli rozpoczynając od daty późniejszej, a kończąc na okresie wcześniejszym. Taki sposób postępowania nie budzi pełnej akceptacji samego autora metody, który wskazuje na niestabilność takiej procedury. Zob. Lee, „Inverse”, 235.

¹⁶ Więcej na temat populacji zastojowej zob. Marek Okólski, *Demografia. Podstawowe pojęcia, procesy i teorie w encyklopedycznym zarysie* (Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2004), 54–58. Do swoich obliczeń Lee wykorzystał tablice autorstwa Coale’a i Demeny’ego. Do innych, często wykorzystywanych tablic wymieralności, można zaliczyć te opracowane przez ONZ (*UN Model Life Tables for Developing Countries*), a także *Ledermann System of Model Life Tables*; *BrassLogit System*. Dla historycznych populacji ziem polskich dysponujemy nielicznymi opracowanymi schematami wymierania. Zob. Stefan Szulc, „Dawne tablice wymieralności Królestwa Polskiego i m. Warszawy”, *Kwartalnik Statystyczny* 5 (1928), 2: 430–444; Edmund Piasecki, „Próba sporządzenia okresowych tablic trwania życia na podstawie ksiąg ruchu naturalnego w XVIII–XX w.”, *PDP* 16 (1985): 139–152; Mieczysław Kędelski, *Umieralność i trwanie życia ludności Wielkopolski w XIX wieku* (Poznań: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 1996); Mieczysław Kędelski, „Piramida wieku i tablice trwania życia ludności Śląska w 1864 roku”, *PDP* 20 (1997): 49–73. O doborze tablic trwania życia w przykładzie prezentowanym w pionierskim artykule, zob. Lee, „Estimating”, 499.

i dzietności. W takiej sytuacji obserwowane będzie stałe tempo wzrostu, spadku lub brak zmian liczby ludności. Rozkłady dla różnych przypadków są częścią składową modelowych tablic trwania życia.

Początkowy stan populacji można ustalić na podstawie szacunków, wykorzystując liczby urodzeń, ślubów lub zgonów i zakładanych wartości surowych współczynników ruchu naturalnego¹⁷, bądź też, co rzadkie w realiach polskich epoki przedrozbiorowej, pozyskać ze źródeł historycznych, pamiętając jednak zawsze o konieczności krytycznego podejścia do tego rodzaju danych¹⁸.

Metoda wymaga pewnych założeń wstępnych. Po pierwsze, zakłada stałość różnicy w rozkładach modelowych umieralności (*mortality*) przez cały okres projekcji, co w praktyce oznacza, że jeśli te zmiany następują, to zawsze według tego samego profilu umieralności – *d*, (*domain of mortality change*)¹⁹. Jego wartości różnią się w obrębie poszczególnych klas wieku, są natomiast niezmiennie przez cały badany okres. Stałą wartość, w całym okresie projekcji, przyjmuje się także dla prawdopodobieństwa zgonu – *q_t*, od którego zaczyna się procedurę dopasowywania w każdym okresie współczynników zgonów tak, aby finalnie otrzymać obserwowaną liczbę zmarłych. Dodatkowym założeniem metody jest brak migracji²⁰. Niezwykle istotny warunek stanowi także posiadanie dokładnych danych o liczbie urodzeń i zgonów, rzutuje to bowiem na wartość otrzymanych wyników. Efektem projekcji odwróconej są, w pierwszym rzędzie, informacje o współczynnikach zgonów prowadzących do obserwowanych zagregowanych danych o liczbie zgonów oraz informacje o liczebności populacji ze szczegółowymi danymi o strukturze wieku. Na tej podstawie można zaś wyznaczyć wskaźniki przeciętnej długości trwania życia – (*e₀*) oraz współczynnik reprodukcji brutto²¹ (*gross reproduction rate*) dla dowolnej klasy wieku, w dowolnym momencie badanego okresu²². W omawianej wersji metody algorytm opracowany przez R.D. Lee wykorzystuje zagregowane 5-letnie przedziały wieku, a także 5-letnie okresy czasu.

¹⁷ Por. Edmund Piasecki, *Ludność parafii bejskiej (woj. kieleckie) w świetle ksiąg metrykalnych z XVIII–XX w. Studium demograficzne* (Warszawa–Wrocław: PWN, 1990), 91–96.

¹⁸ Irena Gieysztorowa, „Niebezpieczeństwa metodyczne polskich badań metrykalnych XVII–XVIII wieku”, *Kwartalnik Historii Kultury Materialnej* (dalej: *KHKM*) 19 (1971), 4: 557–604.

¹⁹ Także płodności (*fertility*). Lee, „Estimating”: 495–496.

²⁰ Ściślej mówiąc, konieczność przyjęcia, że bilans migracji wynosi zero. Uwaga ta dotyczy tylko pierwotnej (omawianej w niniejszym artykule) wersji metody. W praktyce stosuje się różne metody szacowania imigracji po to, aby oczyszczony z nich zbiór danych mógł spełnić założenie braku wpływu migracji na liczbę ludności w modelu.

²¹ W klasycznej metodzie zaproponowanej przez Ronalda Lee płeć nie jest wyodrębniona, zatem przybliżone wartości współczynnika reprodukcji brutto otrzymuje się poprzez odniesienie liczby dzieci obu płci do liczby ludności w wieku 15–49 lat (wieku rozrodczym kobiet).

²² Dzięki późniejszym rozszerzeniom metody, repertuar możliwych do otrzymania parametrów można poszerzyć m.in. o współczynnik reprodukcji netto i strukturę wiekową ludności z podziałem na płeć.

Ponadto Lee, grupując dane według wieku, dokonał agregacji danych dla ostatniej grupy wieku, stąd w pierwotnej wersji metody ostatnia klasa obejmuje osoby w wieku 55 i więcej lat²³.

Główną ideą metody jest odpowiednie rozdzielenie zagregowanej liczby zgonów między kolejne grupy wieku w sytuacji, gdy nie posiadamy danych o strukturze wieku zmarłych. Procedura prowadząca do tego podziału wygląda następująco: rozpoczynając projekcję dla danego okresu, mnożymy kolejne wartości prawdopodobieństw zgonów przez liczebność osób w kolejnych grupach wieku w okresie wcześniejszym. Suma iloczynów stanowi oczekiwaną liczbę zgonów w badanym okresie. Ich porównanie z empiryczną liczbą zgonów z tego samego okresu pozwala na ustalenie różnic. W kolejnym kroku różnice te nie są jednak rozdzielane do poszczególnych rozkładów prawdopodobieństw zgonów q_i , ale do zmiany wzorca umieralności d_i , charakterystycznego dla poszczególnych grup wieku²⁴. Służy do tego tzw. wskaźnik korygujący (*an index of mortality variability*) – k_t , pełniący także istotną rolę kontrolną. Przykładowo, jeśli weźmiemy pod uwagę dwie procedury projekcji, z identycznymi parametrami początkowymi i liczbami urodzeń i zgonów, różniącymi się jednak rozkładami prawdopodobieństw zgonów – ($q_i^{(1)} \neq q_i^{(2)}$), wówczas o lepszym dopasowaniu parametrów projekcji świadczyć będzie niższy wskaźnik dopasowania umieralności K^2 (obliczony poprzez podniesienie k_t do kwadratu i zsumowanie go za cały badany okres)²⁵.

Wykorzystując wyżej wymienione elementy składowe, otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo zgonu $q_{i,t}$ w grupie osób w wieku i w okresie t . Poniższe wzory obrazują formalnie procedurę postępowania opisaną przez Lee w 1974 roku.

Na początek wprowadźmy następujące oznaczenia:

$N_{i,t}$ – rozkład populacji według wieku i w czasie t (w badaniach przyjmuje się najczęściej, że t jest okresem jednorocznym lub pięcioletnim, dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się także pięcioletnie rozkłady wieku, tzn. 0–4, 5–9, 10–14, 15–19 itd.),

B_t – liczba zaobserwowanych urodzeń w czasie t ,

D_t – liczba zaobserwowanych zgonów w czasie t ,

²³ Lee, „Estimating”, 496. W rozwinięciach metody pojawiły się algorytmy umożliwiające otrzymanie struktury wiekowej ludności z podziałem na poszczególne roczniki, a także w corocznych okresach czasu. Zob. przypis 7.

²⁴ Lee, „Inverse”, 496–497.

²⁵ Więcej na ten temat zob. Robert McCaa, „Benchmarks for a New Inverse Population Projection Program. England, Sweden, and a Standard Demographic Transition”, w: *Old and New Methods in Historical Demography*, red. David S. Reher, Roger S. Schofield (Oxford: Clarendon Press, 1993), 40–56.

$q_{i,t}$ – współczynniki zgonu dla grupy wieku i w czasie t (tj. prawdopodobieństwo, że osoby będące w przedziale wieku i do $i + 1$ umrą w okresie t),

L_i – liczba osobolat przeżytych w danej klasie wieku (równej sumie lat przeżytych wewnątrz rozważanego przedziału czasowego przez osoby, które przetrwały do kolejnej klasy wieku i lat przeżytych wewnątrz przedziału czasowego przez osoby, które zmarły w jego trakcie).

Metoda wprowadzona przez Lee opiera się na założeniu, że rozkłady zgonów według wieku można opisać za pomocą funkcji opartej o wybrany modelowy rozkład współczynników zgonów q_i oraz korektę opartą na pomniejszeniu lub powiększaniu o parametr k_t (współczynnik zależny tylko od czasu t) tego rozkładu o różnicę d_i , wynikającą z typu tablic modelowych, co można zapisać następująco:

$$q_{i,t} = q_i + k_t d_i \quad (1)$$

gdzie

$$q_i = 1 - \frac{L_{i+1}}{L_i} \quad (2)$$

Aby określić współczynnik q_i , wykorzystuje się modelowe tablice trwania życia. Natomiast współczynnik d_i jest różnicą między współczynnikami q_i dla dwóch sąsiednich tabel życia, tzn.

$$d_i = q_i^{(1)} - q_i^{(2)}; q_i^{(1)} > q_i^{(2)} \quad (3)$$

Niech ω będzie najwyższym przedziałem wieku. Oznaczmy ponadto oddzielną liczbę nowo narodzonych dzieci jako oddzielną początkową grupę wieku $N_{-1,t} = B_t$ podlegającą odrębnemu prawdopodobieństwu zgonu niż dzieci w wieku 0–4 lata. Aby wyznaczyć współczynnik korygujący k_t , pozwalający na uspojnienie obserwowanej liczby zgonów i dopasowywanych w metodzie współczynników zgonów, wykorzystujemy następującą zależność:

$$D_t = \sum_{i=-1}^{\omega-1} q_{i,t} N_{i,t} \quad (4)$$

Po zastosowaniu wzoru (1) otrzymujemy

$$D_t = \sum_{i=-1}^{\omega-1} (q_i^{(1)} + k_t d_i) N_{i,t} \quad (5)$$

Ponieważ współczynnik k_t zależy tylko od czasu t , więc po przekształceniach otrzymujemy

$$D_t = \sum_{i=-1}^{\omega-1} q_i^{(1)} N_{i,t} + k_t \sum_{i=-1}^{\omega-1} d_i N_{i,t} \quad (6)$$

Stąd po zastosowaniu zależności (3) mamy

$$k_t = \frac{D_t - \sum_{i=-1}^{\omega-1} q_i^{(1)} N_{i,t}}{\sum_{i=-1}^{\omega-1} (q_i^{(1)} - q_i^{(2)}) N_{i,t}} \quad (7)$$

Następnie wykorzystujemy fakt, że prawdopodobieństwo przeżycia do następnej klasy wieku i , oznaczane symbolem p_i , spełnia związek $p_i + q_i = 1$. Główna zależność wykorzystywana w metodzie projekcji odwróconej jest zależnością rekurencyjną postaci:

$$N_{i+1,t+1} = N_{i,t}(1 - q_{i,t}) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, \omega - 2 \quad (8)$$

z warunkiem początkowym $N_{-1,t+1} = B_{t+1}$.

Charakter rekurencyjny zależności (8) określa kolejność wykonywania obliczeń, tzn. najpierw należy znaleźć k_{t+1} , potem $N_{i,t+2}$, następnie k_{t+2} i $N_{i,t+3}$ itd. dla każdej grupy wieku i . Punktem wyjściowym do zastosowania rekurencji (8) jest znajomość rozkładu populacji według wieku i w czasie początkowym t , tzn. wielkość $N_{i,t}$. Jak wcześniej wspomniano, strukturę wieku populacji w momencie rozpoczęcia projekcji można uzyskać z wyników badań nominatywnych (jeśli są dostępne) lub modelowych tablic trwania życia, których parametry dobiera się tak, aby struktura wieku była możliwie zbliżona do prawdopodobnie występującej na danym obszarze i w danym okresie. W dalszej części artykułu wskazano, że zbudowany model ma własności ergodyczne. Nawet jeśli początkowy rozkład ludności według wieku nie jest spójny z dostępnymi informacjami, wraz z kolejnymi iteracjami projekcji będzie on zbiegał do rozkładu bezpośrednio wynikającego z otrzymanych za pomocą skorygowanych współczynników zgonów. Metodę projekcji odwróconej można także wykorzystać do oszacowania podstawowych miar demograficznych dla badanej populacji: oczekiwanej dalszej długości życia w momencie urodzenia (t) w sposób kohortowy $e_0^c(t)$ lub przekrojowy $e_0^p(t)$ oraz współczynników płodności według wieku $m_{i,t}$ dla badanej populacji.

Miary oczekiwanego dalszego trwania życia można wyznaczyć za pomocą następujących wzorów. Niech $p_{i,t}^c$ oznacza proporcję w kohorcie osób z grupy urodzonej w okresie $(t - i - 1, t - i)$ dożywających wieku $(i, i + 1)$ w okresie t . Wtedy

$$p_{i,t}^c = \prod_{j=-1}^{i-1} (1 - q_{j,t-i+j}) \quad (9)$$

Dla jednorocznych grup wieku proporcje te są liczbami osobolat przeżytych przez osoby z danej kohorty w określonych okresach czasu, zatem po zsumowaniu wszystkich grup wieku otrzymujemy przeciętną długość trwania życia w momencie narodzin dla kohorty $e_0^c(t)$, tzn.

$$e_0^c(t) = \sum_{i=-1}^{\omega-1} p_{i,t+i+1}^c \quad (10)$$

gdzie t jest okresem czasu, w którym urodziły się osoby z kohorty. W przypadku gdy rozważane są okresy pięcioletnie, składniki powyższej sumy są przemnażane przez 5. W analogiczny sposób można oszacować przekrojowe oczekiwane długości trwania życia w momencie narodzin $e_0^p(t)$ za pomocą zależności:

$$e_0^p(t) = \sum_{i=-1}^{\omega-1} p_{i,t} \quad (11)$$

gdzie

$$p_{i,t} = \prod_{j=-1}^{\omega-1} (1 - q_{j,t}) \quad (12)$$

Z kolei w celu otrzymania współczynników płodności według wieku $m_{i,t}$ stosuje się dopasowywanie za pomocą parametru f_t modelowego rozkładu współczynników płodności w czasie t określonego wzorem

$$m_{i,t} = f_t m_i \quad (13)$$

gdzie m_i jest założonym rozkładem współczynników dzietności (np. wziętym z modelowych tablic ludności), zaś f_t parametrem korygującym wspólnym dla wszystkich współczynników płodności w określonym okresie czasu. Jeżeli przyjmujemy, że współczynnik m_i jest znormalizowany, tzn. $\int_0^a m(a) da = 1$, to współczynnik f_t będzie równy współczynnikowi reprodukcji brutto w czasie t . Ponieważ współczynnik $m_{i,t}$ odnosi się do obydwu płci, więc

$$B_t = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2} m_{i,t} (N_{i,t} + N_{i,t+1}) \quad (14)$$

gdzie α i β ($\alpha = 15$, $\beta = 49$) są odpowiednio dolną i górną granicą rozpiętości wieku płodności kobiet. Korzystając z zależności (13), mamy

$$B_t = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2} f_t m_i (N_{i,t} + N_{i,t+1}) \quad (15)$$

Stąd

$$B_t = f_t \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2} m_i (N_{i,t} + N_{i,t+1}) \quad (16)$$

Zatem zarówno współczynnik reprodukcji brutto, jak i współczynnik korygujący w czasie rozkład współczynników płodności równy jest

$$f_t = \frac{B_t}{\sum_{i=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{2} \ddot{u}_i (i \ddot{u} + i t + \dots)} \quad (17)$$

Podjmując dyskusję nad oryginalną metodą badania populacji historycznych, należy podkreślić, że jej duża wartość polega na tym, iż do wymaganych obliczeń wystarczą ograniczone dane źródłowe, tj. stan początkowy populacji oraz liczby ruchu naturalnego. Muszą one być uzupełnione o znajomość struktury wieku populacji oraz parametry demograficzne, takie jak przeciętne trwanie życia, płodność oraz poziom migracji. Z perspektywy warsztatu historyka, dane tego typu rzadko kiedy mają charakter empiryczny, stąd konieczność przyjęcia, często dyskusyjnych w kontekście ich praktycznego wykorzystania, rozwiązań modelowych. W rozpoczętej w połowie lat 70. ubiegłego wieku debacie naukowej zwrócono też uwagę na pewne „ułomności” metody projekcji odwróconej, równocześnie wskazując propozycje jej udoskonalenia. Jedną z pierwszych modyfikacji zaproponował norweski badacz Helge Brunborg. Zauważył on, iż zastosowane przez Ronalda Lee grupowanie ludności pod względem wieku, skutkuje istotnym błędem na późniejszym etapie obliczeń. Zamierzeniem Lee było uproszczenie całej procedury obliczeniowej (pamiętajmy, że pierwotna wersja projekcji odwróconej pojawiła się, kiedy zarówno użytkowanie komputerów, jak i same możliwości obliczeniowe maszyn były znacznie ograniczone), stąd w badanej populacji osoby w wieku 55 lat i więcej znalazły się w jednym przedziale wieku. To uproszczenie, jak wykazał Brunborg, prowadziło do zniekształcania obliczanych proporcji wieku w populacji. Problem ten nie był tak istotny, kiedy oczekiwana długość życia dla badanej populacji nie przekraczała znacząco 30 lat. Negatywny efekt agregacji pojawiał się wraz ze wzrostem tego wskaźnika lub jego silnym zróżnicowaniem w czasie. Algorytm Brunborga z 1976 roku umożliwiał stosowanie ostatniego, otwartego przedziału z dolną granicą 75, 95, a nawet 100 i więcej lat²⁶.

Kolejnym ważnym rozwinięciem metody Ronalda Lee było zastąpienie 5- lub 10-letnich okresów projekcji ujęciem corocznym. Po raz pierwszy rozwiązanie to zastosowali Jean-Noël Biraben i Noël Bonneuil. Początkowo podejście takie krytykowano za przesadną dokładność, która kłóciła się z równoczesnym wykorzystywaniem często wątpliwej jakości danych źródłowych. Badacze udowodnili jednak, że w latach kryzysowych agregacja danych prowadziła do błędów. Zacieślało się zróżnicowanie umieralności w poszczególnych latach, co w konsekwencji

²⁶ Helge Brunborg, „The Inverse Projection Method Applied to Norway, 1735–1974” (niepubl., 1976).

skutkowało fałszywym obrazem struktury wieku badanej populacji w czasie trwania kryzysu²⁷.

Metodę projekcji odwróconej poddano krytyce w kontekście wyżej wspomnianych zapaści demograficznych, wywołanych np. epidemiami chorób zakaźnych, klęskami głodu, wojnami. Wykorzystanie do obliczeń modelowych tablic trwania życia obarczone jest wówczas dużym ryzykiem błędu²⁸. Dla przykładu, interpolacja wysokich współczynników zgonów charakterystycznych dla najmłodszych i najstarszych grup wieku skutkuje zawyżeniem liczby zmarłych właśnie w tych kategoriach wieku. Przykład rozwiązania problemu przedstawili włoscy badacze, którzy dla lat klęskowych posłużyli się wzorcami umieralności uzyskanymi empirycznie²⁹. Mniej precyzyjna, choć częściej stosowana, modyfikacja metody polega na przyjęciu umownego proggu umieralności (dla społeczeństw preindustrialnych około 40 zgonów na 1000 mieszkańców), poniżej którego zgony według wieku rozdzielane są na podstawie standardowego schematu postępowania projekcji odwróconej, zaś zgony powyżej tego proggu – według takiego samego prawdopodobieństwa dla każdego z przedziałów wieku³⁰.

Ważnym uzupełnieniem projekcji odwróconej była też modyfikacja algorytmu umożliwiająca projekcję ludności z podziałem na płeć. Ograniczenie w tym zakresie stanowi tylko dostępność do danych uwzględniających ten podział³¹.

Obok klasycznej metody projekcji odwróconej i jej rozwinięć pojawiły się także nowe propozycje metodologiczne, nawiązujące do idei zaproponowanej przez Ronalda Lee. Charakteryzują się one bardziej zaawansowanymi technikami obliczeń, są także bardziej wymagające, jeśli chodzi o zakres wejściowych danych źródłowych. Najważniejsze z nich to: *back projection*, *general inverse projection*, *differentiated inverse projection* oraz *stochastic inverse projection*³².

²⁷ Jean-Noël Biraben, Noël Bonneuil, „Population et économie en pays de Caux aux XVIe et XVIIe siècles”, *Population* 6 (1986): 937–960.

²⁸ Zdawał sobie z tego sprawę R. Lee (zob. Lee, „Estimating”, 496).

²⁹ Salvatore Bertino, Eugenio Sonnino, „La proiezione inversa stocastica: tecnica e applicazione”, w: *Le Italie Demografiche. Saggi di demografia storica*, red. Marco Breschi, Giovanna da Molin, Lorenzo del Panta, Luigi Pace (Udine: Dipartimento de Scienze Statistiche, Università degli Studi di Udine, 1995).

³⁰ Noël Bonneuil, „The Trend Method Applied to English Data” w: *Old and New Methods*, 57–65.

³¹ Robert McCaa, „The Female Population of Chile, 1855–1964: A Microcomputer Balance Sheet Method”, *Latin American Population History Newsletter* 15 (1989): 9–14.

³² Ostatnie podsumowanie badań w zakresie wykorzystania projekcji odwróconej i pokrewnych metod, zob. Elisabetta Barbi, Salvatore Bertino, Eugenio Sonnino, red., *Inverse Projection Techniques. Old and New Approaches* (Rostock: Springer, 2004).

Twierdzenie ergodyczne

Idea wykorzystywana w projekcji odwróconej oparta jest na słabym twierdzeniu ergodycznym w demografii. Już Kenneth Wachter³³ zauważył, że zalety stosowania metody projekcji odwróconej wynikają z możliwości wykorzystania zależności wynikających z równania Lotki³⁴, opisującego konsekwencje stałości współczynników demograficznych w długim okresie. Zaletą występowania ergodyczności w projekcjach odwróconych jest możliwość automatycznego, stopniowego korygowania struktury ludności przez algorytm stosowany w projekcjach. Oznacza to, że nawet w przypadku przyjęcia wyjściowych wartości dalekich od spójności z danymi dotyczącymi urodzeń i zgonów oraz przyjętych tablic trwania życia, odwrócona projekcja zbiega do wartości spójnych z dostępnymi danymi empirycznymi. Niemniej jednak pożądana z punktu widzenia wyznaczania struktur wieku ludności w przeszłości własność ergodyczności występuje w odwróconych projekcjach jedynie pod pewnymi warunkami sformułowanymi przez Wachtera.

W niniejszej pracy podamy najpierw matematyczną wersję słabego twierdzenia ergodycznego, na początek przypominając podstawowe pojęcia z algebry, które będą wykorzystywane w kolejnych formułach. Macierzą, oznaczaną symbolem A , nazywamy prostokątną tablicę złożoną z mn liczb ustawionych w m wierszach i n kolumnach. Liczby m , n nazywamy wymiarami macierzy. Jeżeli $m = n$, to macierz A nazywamy macierzą kwadratową stopnia n . Ogólnie macierz o wymiarach $m \times n$ możemy zapisać w następującej postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ lub } A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

W rozdziale tym rozważymy tylko macierze kwadratowe. Zapis a_{ij} oznacza, że dana liczba (element macierzy) znajduje się w i -tym wierszu i j -tej kolumnie. Macierzą nieujemną (odp. dodatnią) nazywamy taką macierz, w której wszystkie elementy są nieujemnymi (odp. dodatnimi) liczbami rzeczywistymi. Iloczynem dwóch macierzy kwadratowych $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ tego samego stopnia n nazywamy macierz kwadratową $C = [c_{ij}]$ stopnia n , w której każdy element wyznaczamy z zależności $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ dla $1 \leq i, j \leq n$. Zapisujemy wtedy $C = A \cdot B$ lub $C = AB$. Niech $k \in \mathbb{N}$, k -tą potęgą macierzy kwadratowej

³³ Wachter, „Ergodicity”, 276.

³⁴ Alfred J. Lotka, „The Structure of the Growing Population”, *Human Biology* 3 (1931), 4: 459–493.

A nazywamy macierz $A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$, gdzie po prawej stronie tej zależności macierz A występuje k razy.

Własności iloczynów macierzy nieujemnych i ich związek z twierdzeniem ergodycznym rozważany był przez Johna Hajnala³⁵. Niech $A_f, f = 1, 2, \dots$, będzie ciągiem macierzy kwadratowych stopnia n . Rozważmy iloczyn tych macierzy postaci:

$$H_{p,r} = A_p A_{p+1} A_{p+2} \dots A_{r-1} A_r, \text{ gdzie } r, p = 1, 2, \dots \text{ i } r \geq p.$$

Niech $H_{p,r} = [h_{i,j}^{(p,r)}]$. Wtedy istnieją dodatnie liczby $V_{i,k}^{(p)}$, niezależne od j takie, że dla ustalonego p przy $r \rightarrow \infty$

$$\frac{h_{i,j}^{(p,r)}}{h_{k,j}^{(p,r)}} \rightarrow V_{i,k}^{(p)} \text{ dla wszystkich } i, j, k \quad (18)$$

Niech teraz $H_{p,r}^* = A_r A_{r-1} \dots A_{p+1}$. Wtedy istnieją liczby $V_{i,k}^{*(p)}$, niezależne od j takie, że dla ustalonego p przy $r \rightarrow \infty$

$$\frac{h_{j,i}^{(p,r)}}{h_{j,k}^{(p,r)}} \rightarrow V_{i,k}^{*(p)} \text{ dla wszystkich } i, j, k \quad (19)$$

Konsekwencją zależności (18) i (19) jest znane twierdzenie Coale'a-Lopeza, sformułowane przez Coale'a w 1958 roku i udowodnione przez jego studenta Lopeza w 1961 roku. Twierdzenie to nazywane jest słabym twierdzeniem ergodycznym. Mówi ono, że dla danych dwóch populacji początkowych z różnymi strukturami wieku, ale związanymi z tym samym ciągiem współczynników życiowych (tzn. współczynników umieralności i płodności), zmieniających się w czasie, ich rozkłady według wieku będą podobne po upływie pewnego czasu. W literaturze można znaleźć różne dowody tego twierdzenia, m.in. dowód z wykorzystaniem rachunku macierzowego. Dowód słabego twierdzenia ergodycznego w terminach pojęć demograficznych przeprowadził W. Brian Arthur w 1981 roku³⁶.

Poniżej omówimy zastosowanie twierdzenia ergodycznego w demografii³⁷. Oznaczmy przez $Y(t)$ wektor o k nieujemnych współrzędnych $Y_i(t)$, gdzie $Y_i(t)$ jest liczbą kobiet w czasie t , które osiągną wiek $i, i = 1, 2, \dots, k$ w dniu swoich następnych urodzin. Wektor ten, tzn. $Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_k(t)]$, będziemy nazywać k -wektorem lub wiekowym censusem w czasie t . Przyjmujemy normę wektora

³⁵ John Hajnal, „On Products of Non-negative Matrices”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 79 (1976): 521–530.

³⁶ W. Brian Arthur, „The Ergodic Theorems Of Demography: A Simple Proof”, *IASA Working Paper* (1981): 1–10.

³⁷ Joel B. Cohen, „Ergodic Theorems in Demography”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 1 (1979), 2: 275–295.

$\|Y\| = |Y_1| + |Y_2| + \dots + |Y_k|$. Ponadto przez rozkład wiekowy $y(t)$ censusu $Y(t)$ rozumiemy znormalizowany wektor $y(t) = \frac{Y(t)}{\|Y(t)\|}$, ($\|y(t)\| = 1$). Niech $x(t)$ będzie ciągiem operatorów, $t = 1, 2, \dots$, odwzorowujących nieujemne k -wektory na pewne nieujemne k -wektory. Rozważany model może być zapisany następująco:

$$Y(t + 1) = x(t+1)Y(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Twierdzenia ergodyczne w demografii przy danym założeniu o ciągu $\{x(t)\}$ opisują zachowanie populacji wymiaru $\|Y(t)\|$ oraz strukturę wieku $Y(t)$ i pokazują, że zachowanie tych wielkości jest niezależne od warunków początkowych. Rozróżnia się trzy typy twierdzeń ergodycznych: mocne, słabe i stochastyczne twierdzenie ergodyczne. W mocnym twierdzeniu ergodycznym zakłada się, że $x(t)$ jest stałe w czasie t . Słabe twierdzenie ergodyczne zakłada, że ciąg $\{x(t)\}$ jest ustalonym ciągiem. Natomiast stochastyczne twierdzenie ergodyczne zakłada, że $\{x(t,w)\}$ jest próbka stochastycznego procesu, w którym $x(t)$ jest wybrane ze zbioru możliwych operatorów.

Założmy, że $x(t)$ jest liniowym operatorem, reprezentowanym przez macierz kwadratową stopnia k postaci

$$X := x(t), \text{ gdzie } x_{ij} = \begin{cases} b_i(t), & \text{gdy } i = 1, \\ s_j(t), & \text{gdy } i = j + 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zatem

$$x(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) & b_2(t) & \dots & b_{k-1}(t) & b_k(t) \\ s_1(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2(t) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{k-1}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

gdzie $b_i(t) \geq 0$ jest płodnością w jednostce czasu w klasie wieku i (zakładamy, że iloraz liczby kobiet w klasie wieku 1 w czasie $t + 1$ urodzonych w przedziale $(t, t + 1)$ do liczby kobiet w klasie wieku i w czasie t jest równy $b_i(t + 1) Y_i(t)$). Wtedy liczba kobiet w klasie wieku 1 w czasie $t + 1$ wyrażona jest następującą zależnością:

$$Y_1(t + 1) = \sum_{i=1}^k b_i(t + 1) Y_i(t) \quad (22)$$

Nieujemne elementy $s_i(t)$ macierzy (21) określają prawdopodobieństwo, że osoba w wieku i przeżyje jeszcze rok i stanie się dokładnie rok starsza. Zatem liczba kobiet w klasie wieku $i + 1$ w czasie $t + 1$ może być opisana następującą zależnością:

$$Y_{i+1}(t+1) = s_i(t+1) Y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (23)$$

Równania (21), (22) i (23) są spójne z równaniem rozważanego modelu (20). Działanie operatora $x(t)$ jest utożsamione z mnożeniem odpowiednich macierzy. Załóżmy, że każda macierz projekcji X postaci (21) w zbiorze wszystkich macierzy projekcji, oznaczonym przez X , spełnia warunki $s_1 > 0, \dots, s_{k-1} > 0, b_{k-1} > 0, b_k > 0$ i iloraz najmniejszego dodatniego elementu do największego elementu tej macierzy jest nie mniejszy niż $R > 0$. Przy tych założeniach zbiór X jest ergodycznym zbiorem macierzy (pomijamy definicję tego pojęcia³⁸). Wtedy w każdej potędze macierzy z tego zbioru, tzn. macierzy X^k , wszystkie elementy są dodatnie. Ponadto każda macierz będąca iloczynem k macierzy ze zbioru X jest także macierzą dodatnią. Podsumowując, udowodnienie ergodyczności macierzy przedstawione powyżej oznacza, że metoda projekcji odwróconej powinna z czasem prowadzić do wyników niezależnych od początkowej struktury wieku, która ze względu na niedostępność danych historycznych może być obciążona błędem. Ponadto mechanizm zawarty w metodzie Lee powinien także korygować potencjalne niezgodności pomiędzy zakładanymi tablicami trwania życia oraz zagregowanymi danymi o liczbie zgonów.

Własności metody a elastyczność stosowania projekcji odwróconej w praktyce

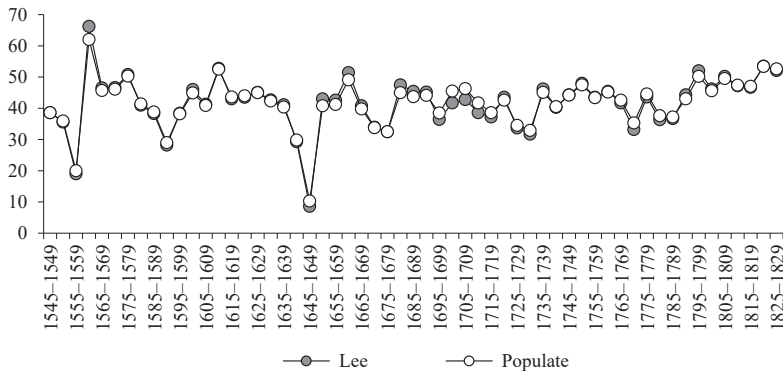
Do zbadania odporności omawianej metody na potencjalnie błędne założenia początkowe posłużyliśmy się tymi samymi danymi, które wykorzystał w swoich obliczeniach Lee, tj. liczbami ruchu naturalnego zarejestrowanymi w parafii Colyton (hrabstwo Devon w Anglii)³⁹. Parametry wejściowe potrzebne do projekcji charakteryzujące dalszą oczekiwaną długość życia w chwili urodzenia oraz strukturę wieku populacji zaczerpnięto z tablic Demeny'ego i Coale'a (szczegółowe odniesienie do tablic zob. źródło do tabel 1 i 2). Wyniki otrzymane przez Lee okazały się zgodne z ustaleniami Wrigleya, korzystającego z metody

³⁸ Zob. Hajnal, „On Products”, 521–531.

³⁹ Kolumny 2 i 3, Lee, „Estimating”, 500.

rekonstrukcji rodzin⁴⁰. Nasze obliczenia różnią się nieznacznie od obliczeń Lee (zob. wykres 1)⁴¹ i wynikają m.in. z różnej liczby przedziałów wieku⁴², a także przesłanek technicznych, tj. zaokrąglania obliczanych wartości⁴³.

Wykres 1. Dalsze przeciętne trwanie życia w chwili urodzenia (e_0) w parafii Colyton w latach 1545–1829 według obliczeń Roberta Lee oraz przy wykorzystaniu programu Populate



Źródło: zob. tab. 1.

Dane zawarte w tabeli 1 stanowią punkt wyjścia dla dalszych, kluczowych z perspektywy ukazania właściwości metody, obliczeń. Symulacje zawarte w tabeli 2 oraz na wykresie 2 i 3 mają za zadanie pokazać „elastyczność” projekcji odwróconej (co jest szczególnie ważne w przypadku niedostatku informacji źródłowych) i zobrazować założenia teoretyczne leżące u podstaw metody.

⁴⁰ Edward Anthony Wrigley, „Family Limitation in Pre-industrial England”, *Economic History Review* 19 (1966): 82–109; tenże, „Mortality in Pre-industrial England: The Example of Colyton, Devon, over Three Centuries”, *Daedalus* 97 (1968), 2: 546–580.

⁴¹ W przypadku współczynnika reprodukcji brutto różnice te są na tyle nieznaczne, że na wykresie praktycznie niedostrzegalne.

⁴² Robert Lee, podobnie jak w prezentowanym przykładzie, wykorzystuje 5-letnie przedziały wieku, jednak kończy grupowanie na wieku 49 lat. Kolejny otwarty przedział grupuje osoby mające 50 i więcej lat. Zob. Lee, „Estimating”, 511–512.

⁴³ Do obliczeń, ze względów praktycznych, posłużono się programem Populate (zob. przypis 7). Wyższość programu Populate nad „ręcznymi” obliczeniami polega przede wszystkim na zautomatyzowaniu całego procesu obliczeniowego, dodatkowo program ma wbudowaną bazę 200 tablic trwania życia, co w praktyce oznacza, że danych dotyczących prawdopodobieństw zgonów dla poszczególnych przedziałów wieku, jak i danych o modelowej strukturze wieku, nie musimy przenosić np. do arkusza kalkulacyjnego.

Tabela 1. Dalsze przeciętne trwanie życia (e_0), współczynnik reprodukcji brutto (GRR) oraz struktura ludności (%) według 5-letnich grup wieku w parafii Colyton w latach 1545–1829

| Lata | Urodzenia | | Zgony | | Liczba populacji na początku okresu | | e_0 | GRR | GRR | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|-----------|-----|-------|------|-------------------------------------|------|-------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | | | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 1545-49 | 176 | 116 | 850 | 38,6 | 2,8 | 14,9 | 10,5 | 9,9 | 9,1 | 8,3 | 7,6 | 6,9 | 6,2 | 5,5 | 4,9 | 4,3 | 3,7 | 3,0 | 2,3 | 1,6 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | 80-84 |
| 1550-54 | 191 | 136 | 910 | 35,9 | 2,9 | 14,8 | 12,5 | 9,6 | 9,0 | 8,2 | 7,4 | 6,7 | 6,0 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,6 | 2,9 | 2,2 | 1,5 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | 75-79 |
| 1555-59 | 127 | 203 | 965 | 20,0 | 1,9 | 8,1 | 12,8 | 12,8 | 9,7 | 8,9 | 8,0 | 7,2 | 6,4 | 5,7 | 5,1 | 4,4 | 3,7 | 2,9 | 2,0 | 1,3 | 0,6 | 0,2 | 0,1 | 70-74 |
| 1560-64 | 127 | 42 | 889 | 62,0 | 1,8 | 12,0 | 7,2 | 11,6 | 11,6 | 8,8 | 8,0 | 7,2 | 6,4 | 5,7 | 5,1 | 4,4 | 3,8 | 3,1 | 2,3 | 1,5 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | 65-69 |
| 1565-69 | 147 | 94 | 974 | 45,7 | 1,9 | 11,8 | 10,6 | 6,7 | 10,7 | 10,6 | 8,0 | 7,3 | 6,5 | 5,8 | 5,1 | 4,5 | 3,8 | 3,1 | 2,4 | 1,6 | 0,9 | 0,3 | 0,1 | 60-64 |
| 1570-74 | 177 | 103 | 1027 | 46,1 | 2,1 | 13,3 | 10,3 | 9,7 | 6,1 | 9,7 | 9,6 | 7,2 | 6,5 | 5,8 | 5,1 | 4,4 | 3,8 | 3,1 | 2,4 | 1,6 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 55-59 |
| 1575-79 | 214 | 100 | 1101 | 50,3 | 2,4 | 15,1 | 11,4 | 9,2 | 8,6 | 5,4 | 8,5 | 8,4 | 6,2 | 5,6 | 5,0 | 4,3 | 3,7 | 3,0 | 2,3 | 1,6 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 50-54 |
| 1580-84 | 251 | 153 | 1215 | 41,4 | 2,9 | 15,2 | 12,8 | 10,3 | 8,2 | 7,7 | 4,8 | 7,5 | 7,3 | 5,4 | 4,9 | 4,2 | 3,6 | 2,9 | 2,2 | 1,6 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 45-49 |
| 1585-89 | 220 | 166 | 1313 | 38,8 | 2,5 | 12,4 | 13,2 | 11,9 | 9,6 | 7,6 | 7,0 | 4,3 | 6,8 | 6,5 | 4,8 | 4,2 | 3,6 | 2,9 | 2,2 | 1,5 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | 40-44 |
| 1590-94 | 219 | 227 | 1367 | 29,0 | 2,4 | 11,0 | 10,7 | 12,7 | 11,4 | 9,1 | 7,1 | 6,5 | 4,0 | 6,2 | 5,9 | 4,3 | 3,6 | 2,9 | 2,1 | 1,4 | 0,7 | 0,3 | 0,1 | 35-39 |
| 1595-99 | 230 | 169 | 1359 | 38,2 | 2,3 | 12,4 | 9,5 | 9,9 | 11,7 | 10,5 | 8,2 | 6,4 | 5,8 | 3,5 | 5,5 | 5,2 | 3,6 | 2,9 | 2,2 | 1,4 | 0,7 | 0,3 | 0,1 | 30-34 |
| 1600-04 | 227 | 141 | 1420 | 44,9 | 2,0 | 12,4 | 10,9 | 8,7 | 9,1 | 10,7 | 9,5 | 7,4 | 5,7 | 5,2 | 3,1 | 4,8 | 4,4 | 3,0 | 2,2 | 1,5 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | 25-29 |
| 1605-09 | 279 | 181 | 1506 | 40,9 | 2,2 | 13,8 | 10,6 | 9,9 | 7,9 | 8,3 | 9,6 | 8,5 | 6,6 | 5,1 | 4,5 | 2,7 | 4,0 | 3,5 | 2,2 | 1,5 | 0,8 | 0,3 | 0,1 | 20-24 |
| 1610-14 | 296 | 129 | 1604 | 52,5 | 2,3 | 14,5 | 11,9 | 9,4 | 8,9 | 7,0 | 7,3 | 8,4 | 7,4 | 5,7 | 4,4 | 3,9 | 2,3 | 3,2 | 2,7 | 1,5 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 15-19 |
| 1615-19 | 318 | 195 | 1771 | 43,6 | 2,4 | 13,6 | 12,5 | 10,8 | 8,6 | 8,0 | 6,3 | 6,5 | 7,5 | 6,5 | 5,0 | 3,8 | 3,3 | 1,8 | 2,4 | 1,8 | 0,8 | 0,4 | 0,1 | 10-14 |
| 1620-24 | 328 | 201 | 1894 | 44,0 | 2,5 | 13,2 | 11,8 | 11,5 | 9,9 | 7,8 | 7,2 | 5,6 | 5,8 | 6,6 | 5,7 | 4,3 | 3,2 | 2,6 | 1,4 | 1,7 | 1,1 | 0,3 | 0,1 | 5-9 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 21 | 22 | 23 | 24 | |
|---------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1625-29 | 353 | 206 | 206 | 2021 | 45,0 | 2,5 | 13,4 | 11,4 | 10,7 | 10,4 | 8,9 | 7,0 | 6,4 | 5,0 | 5,1 | 5,8 | 5,0 | 3,7 | 2,6 | 2,0 | 0,9 | 0,9 | 0,4 | 0,1 |
| 1630-34 | 381 | 242 | 2168 | 2168 | 42,3 | 2,5 | 13,2 | 11,5 | 10,5 | 9,8 | 9,5 | 8,0 | 6,3 | 5,7 | 4,4 | 4,5 | 5,0 | 4,2 | 3,0 | 1,9 | 1,4 | 0,5 | 0,4 | 0,1 |
| 1635-39 | 379 | 267 | 2307 | 2307 | 40,4 | 2,2 | 12,3 | 11,5 | 10,7 | 9,7 | 9,0 | 8,6 | 7,3 | 5,6 | 5,1 | 3,9 | 3,9 | 4,3 | 3,4 | 2,2 | 1,3 | 0,7 | 0,2 | 0,1 |
| 1640-44 | 349 | 378 | 2419 | 29,8 | 1,9 | 10,1 | 10,7 | 11,1 | 10,3 | 9,2 | 8,5 | 8,0 | 6,7 | 5,2 | 4,7 | 3,5 | 3,4 | 3,5 | 2,5 | 1,5 | 0,6 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |
| 1645-49 | 144 | 579 | 2390 | 10,3 | 0,8 | 2,8 | 8,6 | 12,0 | 12,4 | 11,2 | 11,2 | 9,7 | 8,8 | 8,2 | 6,7 | 5,1 | 4,5 | 3,1 | 2,7 | 2,3 | 1,3 | 0,4 | 0,1 | 0,0 |
| 1650-54 | 217 | 187 | 1955 | 40,8 | 1,2 | 8,6 | 2,5 | 8,3 | 11,5 | 11,7 | 10,5 | 9,1 | 8,2 | 7,5 | 6,2 | 4,6 | 4,6 | 3,9 | 2,6 | 2,1 | 1,6 | 0,7 | 0,2 | 0,0 |
| 1655-59 | 228 | 206 | 1985 | 41,2 | 1,2 | 9,0 | 7,8 | 2,4 | 7,9 | 10,9 | 11,1 | 9,9 | 8,5 | 7,6 | 7,0 | 5,6 | 4,1 | 3,3 | 2,1 | 1,5 | 0,9 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| 1660-64 | 221 | 166 | 2007 | 49,1 | 1,2 | 9,1 | 8,3 | 7,4 | 2,3 | 7,5 | 10,3 | 10,4 | 9,2 | 7,9 | 7,0 | 6,3 | 5,0 | 3,5 | 2,7 | 1,5 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |
| 1665-69 | 210 | 236 | 2062 | 39,8 | 1,2 | 8,1 | 8,4 | 8,1 | 7,3 | 2,2 | 7,3 | 9,9 | 9,9 | 8,7 | 7,4 | 6,5 | 5,7 | 4,3 | 2,8 | 1,9 | 0,9 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |
| 1670-74 | 170 | 276 | 2036 | 33,8 | 1,2 | 6,4 | 7,5 | 8,5 | 8,2 | 7,3 | 2,2 | 7,2 | 9,6 | 9,6 | 8,4 | 7,0 | 5,9 | 4,9 | 3,4 | 2,0 | 1,1 | 0,3 | 0,1 | 0,1 |
| 1675-79 | 175 | 282 | 1930 | 32,5 | 1,4 | 6,9 | 5,9 | 7,6 | 8,6 | 8,3 | 7,3 | 2,2 | 7,0 | 9,3 | 9,2 | 7,9 | 6,4 | 5,1 | 3,9 | 2,4 | 1,1 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |
| 1680-84 | 191 | 197 | 1823 | 45,0 | 1,6 | 8,6 | 6,4 | 5,8 | 7,5 | 8,4 | 8,0 | 7,0 | 2,1 | 6,6 | 8,8 | 8,6 | 7,2 | 5,6 | 4,2 | 2,9 | 1,5 | 0,5 | 0,1 | 0,1 |
| 1685-89 | 166 | 212 | 1817 | 43,7 | 1,3 | 7,6 | 8,2 | 6,4 | 5,8 | 7,4 | 8,3 | 7,8 | 6,8 | 2,0 | 6,4 | 8,4 | 7,9 | 6,4 | 4,6 | 3,1 | 1,8 | 0,7 | 0,1 | 0,1 |
| 1690-94 | 141 | 209 | 1771 | 44,1 | 1,1 | 6,7 | 7,3 | 8,3 | 6,5 | 5,9 | 7,4 | 8,2 | 7,7 | 6,7 | 2,0 | 6,1 | 7,8 | 7,1 | 5,4 | 3,5 | 2,0 | 0,9 | 0,2 | 0,2 |
| 1695-99 | 174 | 251 | 1703 | 38,5 | 1,5 | 8,3 | 6,4 | 7,4 | 8,4 | 6,5 | 5,8 | 7,3 | 8,1 | 7,5 | 6,5 | 1,9 | 5,7 | 6,9 | 5,9 | 4,0 | 2,2 | 0,9 | 0,2 | 0,2 |
| 1700-04 | 187 | 204 | 1626 | 45,5 | 1,7 | 9,6 | 7,8 | 6,3 | 7,3 | 8,2 | 6,3 | 5,6 | 7,0 | 7,7 | 7,2 | 6,1 | 1,7 | 5,0 | 5,7 | 4,4 | 2,5 | 1,1 | 0,3 | 0,3 |
| 1705-09 | 170 | 195 | 1609 | 46,3 | 1,6 | 8,9 | 9,1 | 7,7 | 6,3 | 7,2 | 8,1 | 6,2 | 5,5 | 6,8 | 7,4 | 6,8 | 5,6 | 1,5 | 4,2 | 4,3 | 2,8 | 1,3 | 0,3 | 0,3 |
| 1710-14 | 141 | 208 | 1584 | 41,7 | 1,3 | 7,4 | 8,5 | 9,2 | 7,8 | 6,3 | 7,2 | 8,0 | 6,1 | 5,4 | 6,6 | 7,1 | 6,3 | 5,0 | 1,3 | 3,1 | 2,7 | 1,4 | 0,4 | 0,4 |
| 1715-19 | 123 | 205 | 1517 | 38,6 | 1,2 | 6,6 | 7,1 | 8,7 | 9,4 | 7,9 | 6,3 | 7,2 | 7,9 | 6,0 | 5,3 | 6,4 | 6,6 | 5,6 | 4,2 | 0,9 | 1,9 | 1,3 | 0,4 | 0,4 |
| 1720-24 | 122 | 169 | 1435 | 42,6 | 1,2 | 7,1 | 6,3 | 7,1 | 8,8 | 9,4 | 7,8 | 6,2 | 7,0 | 7,7 | 5,8 | 5,0 | 5,9 | 5,9 | 4,7 | 3,1 | 0,6 | 0,9 | 0,4 | 0,4 |
| 1725-29 | 170 | 218 | 1388 | 34,5 | 1,6 | 9,3 | 6,5 | 6,3 | 7,1 | 8,7 | 9,2 | 7,6 | 6,0 | 6,7 | 7,3 | 5,4 | 4,5 | 5,1 | 4,7 | 3,3 | 1,8 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| 1730-34 | 166 | 221 | 1340 | 32,9 | 1,6 | 9,3 | 8,5 | 6,5 | 6,3 | 7,0 | 8,5 | 8,9 | 7,3 | 5,7 | 6,4 | 6,8 | 4,9 | 3,9 | 4,0 | 3,2 | 1,9 | 0,7 | 0,1 | 0,1 |
| 1735-39 | 183 | 152 | 1285 | 45,1 | 1,9 | 11,4 | 8,4 | 8,1 | 6,2 | 5,9 | 6,6 | 7,9 | 8,3 | 6,8 | 5,3 | 5,8 | 6,0 | 4,1 | 3,1 | 2,9 | 2,0 | 0,8 | 0,2 | 0,2 |
| 1740-44 | 155 | 172 | 1316 | 40,5 | 1,7 | 9,4 | 10,5 | 8,3 | 8,0 | 6,0 | 5,7 | 6,3 | 7,6 | 7,9 | 6,4 | 4,9 | 5,2 | 5,2 | 3,3 | 2,2 | 1,7 | 0,9 | 0,2 | 0,2 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 29 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---------|-----|-----|------|------|-----|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1745-49 | 159 | 150 | 1299 | 44,2 | 1,9 | 9,9 | 8,6 | 10,2 | 8,0 | 7,7 | 5,7 | 5,5 | 6,0 | 7,1 | 7,3 | 5,9 | 4,4 | 4,5 | 4,5 | 4,2 | 2,4 | 1,4 | 0,8 | 0,2 |
| 1750-54 | 164 | 137 | 1308 | 47,5 | 2,0 | 10,3 | 9,1 | 8,3 | 9,8 | 7,7 | 7,3 | 5,4 | 5,1 | 5,6 | 6,6 | 6,7 | 5,2 | 3,8 | 3,8 | 3,6 | 3,1 | 1,5 | 0,6 | 0,2 |
| 1755-59 | 162 | 157 | 1335 | 43,4 | 1,8 | 9,8 | 9,5 | 8,8 | 8,0 | 9,4 | 7,3 | 6,9 | 5,1 | 4,8 | 5,2 | 6,1 | 6,0 | 4,5 | 4,5 | 3,0 | 2,6 | 1,9 | 0,7 | 0,2 |
| 1760-64 | 175 | 151 | 1340 | 45,2 | 1,8 | 10,6 | 8,9 | 9,1 | 8,5 | 7,6 | 8,9 | 6,9 | 6,5 | 4,8 | 4,4 | 4,7 | 5,4 | 5,1 | 3,6 | 2,2 | 1,6 | 0,9 | 0,2 | 0,2 |
| 1765-69 | 175 | 165 | 1364 | 42,6 | 1,7 | 10,2 | 9,6 | 8,6 | 8,8 | 8,1 | 7,3 | 8,4 | 6,5 | 6,0 | 4,4 | 4,1 | 4,2 | 4,6 | 4,1 | 2,6 | 1,3 | 0,7 | 0,2 | 0,2 |
| 1770-74 | 161 | 199 | 1374 | 35,3 | 1,6 | 9,0 | 9,3 | 9,6 | 8,6 | 8,6 | 7,9 | 7,0 | 8,1 | 6,1 | 5,7 | 4,1 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 2,9 | 1,5 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |
| 1775-79 | 165 | 145 | 1336 | 44,6 | 1,6 | 10,0 | 8,2 | 9,0 | 9,2 | 8,2 | 8,1 | 7,4 | 6,6 | 7,5 | 5,7 | 5,2 | 3,6 | 3,1 | 2,9 | 2,6 | 1,8 | 0,7 | 0,1 | 0,1 |
| 1780-84 | 183 | 185 | 1356 | 37,6 | 1,8 | 10,3 | 9,0 | 7,9 | 8,7 | 8,8 | 7,8 | 7,7 | 7,0 | 6,1 | 6,9 | 5,2 | 4,6 | 3,1 | 2,4 | 2,0 | 1,5 | 0,7 | 0,2 | 0,2 |
| 1785-89 | 179 | 182 | 1354 | 37,2 | 1,7 | 10,1 | 9,3 | 8,7 | 7,7 | 8,3 | 8,4 | 7,3 | 7,2 | 6,5 | 5,7 | 6,3 | 4,6 | 3,9 | 2,4 | 1,7 | 1,2 | 0,6 | 0,2 | 0,2 |
| 1790-94 | 196 | 153 | 1351 | 43,0 | 1,9 | 11,3 | 9,0 | 8,8 | 8,2 | 7,2 | 7,8 | 7,7 | 6,7 | 6,6 | 5,9 | 5,1 | 5,5 | 3,8 | 3,0 | 1,7 | 1,0 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |
| 1795-99 | 240 | 131 | 1394 | 50,2 | 2,3 | 13,7 | 10,0 | 8,2 | 8,0 | 7,4 | 6,5 | 6,9 | 6,9 | 6,0 | 5,8 | 5,1 | 4,3 | 4,5 | 3,0 | 2,1 | 1,0 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |
| 1800-04 | 198 | 156 | 1503 | 45,6 | 1,9 | 10,6 | 12,4 | 9,5 | 7,8 | 7,5 | 6,9 | 6,0 | 6,4 | 6,4 | 5,5 | 5,2 | 4,5 | 3,6 | 3,6 | 2,1 | 1,3 | 0,4 | 0,1 | 0,1 |
| 1805-09 | 251 | 148 | 1545 | 49,5 | 2,4 | 13,0 | 9,4 | 11,4 | 8,7 | 7,1 | 6,8 | 6,3 | 5,4 | 5,8 | 5,7 | 4,8 | 4,5 | 3,7 | 2,8 | 2,6 | 1,3 | 0,6 | 0,1 | 0,1 |
| 1810-14 | 298 | 176 | 1648 | 47,4 | 2,7 | 14,1 | 11,3 | 8,5 | 10,4 | 7,9 | 6,4 | 6,1 | 5,6 | 4,8 | 5,1 | 4,9 | 4,1 | 3,7 | 2,9 | 2,0 | 1,5 | 0,6 | 0,1 | 0,1 |
| 1815-19 | 329 | 191 | 1770 | 47,0 | 2,8 | 14,4 | 12,2 | 10,3 | 7,7 | 9,3 | 7,0 | 5,7 | 5,4 | 4,9 | 4,2 | 4,4 | 4,1 | 3,3 | 2,8 | 2,0 | 1,2 | 0,7 | 0,1 | 0,1 |
| 1820-24 | 331 | 159 | 1908 | 53,4 | 2,5 | 13,9 | 12,6 | 11,1 | 9,3 | 6,9 | 8,3 | 6,3 | 5,0 | 4,8 | 4,3 | 3,6 | 3,7 | 3,4 | 2,6 | 2,0 | 1,2 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |
| 1825-29 | 306 | 168 | 2080 | 52,6 | 2,1 | 12,0 | 12,5 | 11,7 | 10,2 | 8,5 | 6,3 | 7,6 | 5,7 | 4,5 | 4,3 | 3,8 | 3,2 | 3,1 | 2,7 | 1,9 | 1,2 | 0,6 | 0,1 | 0,1 |

Źródło: Kolumny 2 i 3 w: Lee, „Estimating”, 500; parametry wejściowe dla modelu A (dla prawdopodobieństwa zgonu – level 8, west, female; dla struktury wieku – level 10, r 10), Ansley J. Coale, Paul Demeny, *Regional Model Life Tables and Stable Populations* (New York: Academic Press, 1983), 45, 64.

Dane z tabeli 1 (scenariusz A) ilustrują replikację obliczeń przeprowadzonych w artykule Lee z 1974 roku, która okazała się bardzo bliska wynikom otrzymanym za pomocą metody rekonstrukcji rodzin przeprowadzonej przez Wrigleya. Na ile jednak otrzymane przez Lee wyniki były rezultatem odpowiedniego doboru przez niego założeń początkowych? W celu odpowiedzi na to pytanie obliczenia dla analogicznych danych o urodzeniach i zgonach przeprowadzono dla trzech scenariuszy o początkowych założeniach wyraźnie różnych od przyjmowanych przez Lee (B, C, i D – tab. 2). Scenariusze te obrazują kolejno wpływ złego dopasowania stanu początkowego populacji (scenariusz B), wyraźnie różnych tablic trwania życia (scenariusz C) oraz wyboru zupełnie odmiennych od deklarowanego przez Lee początkowego poziomu współczynnika reprodukcji brutto, który może zaburzać liczbę urodzeń, ale ma jednocześnie wpływ na wybór początkowej struktury ludności według wieku opartej na tablicach modelowych.

Bardziej szczegółowe założenia są następujące: w scenariuszu B zachowano wszystkie wejściowe parametry z wzorcowego scenariusza A, zmieniając jednak stan początkowy populacji. Zamiast 850 osób przyjęto za punkt wyjścia populację na poziomie 700 osób. Z kolei w scenariuszu C tablice trwania życia zostały zmienione w taki sposób, że wejściowa oczekiwana długość trwania życia (e_0) nie wynosiła 37,5 roku, lecz wybrano tablice, w których przeciętna długość trwania życia wynosiła 50 lat. Scenariusz ten zakładał, że początkowy rozkład współczynników zgonów w modelu jest bardziej charakterystyczny dla XX-wiecznych populacji, a nie tych z okresu prestatystycznego. W ostatnim wariantcie – scenariusz D – użyto rozkładu struktury wieku ludności odpowiadającej ekstremalnie wysokiemu przyrostowi naturalnemu na poziomie 4% rocznie. Wyniki obliczeń zaprezentowano w tabeli 2.

Tabela 2. Dalsze trwanie życia w chwili urodzenia (e_0) oraz współczynnik reprodukcji brutto (GRR) w parafii Colyton w latach 1545–1829 według czterech modeli projekcji wstecznej

| Lata | Urodzenia | Zgony | Liczebność populacji na początku okresu | Liczebność populacji w środku okresu | e_0 (A) | e_0 (B) | e_0 (C) | e_0 (D) | GRR(A) | GRR(B) | GRR(C) | GRR(D) |
|---------|-----------|-------|---|--------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1545–49 | 176 | 116 | 850 | 879 | 38,6 | 34,8 | 38,4 | 83,4 | 2,8 | 3,4 | 2,8 | 25,5 |
| 1550–54 | 191 | 136 | 910 | 937 | 35,9 | 32,3 | 35,7 | 74,8 | 2,9 | 3,6 | 2,9 | 45,3 |
| 1555–59 | 127 | 203 | 965 | 926 | 20,0 | 16,2 | 19,0 | 71,1 | 1,9 | 2,4 | 1,9 | 22,2 |
| 1560–64 | 127 | 42 | 889 | 930 | 62,0 | 57,8 | 62,8 | 151,0 | 1,8 | 2,3 | 1,8 | 14,0 |
| 1565–69 | 147 | 94 | 974 | 1000 | 45,7 | 41,2 | 46,0 | 143,0 | 1,9 | 2,3 | 1,9 | 6,8 |
| 1570–74 | 177 | 103 | 1027 | 1063 | 46,1 | 41,8 | 46,4 | 101,0 | 2,1 | 2,5 | 2,1 | 3,3 |
| 1575–79 | 214 | 100 | 1101 | 1156 | 50,3 | 46,2 | 50,6 | 62,5 | 2,4 | 2,8 | 2,5 | 2,2 |

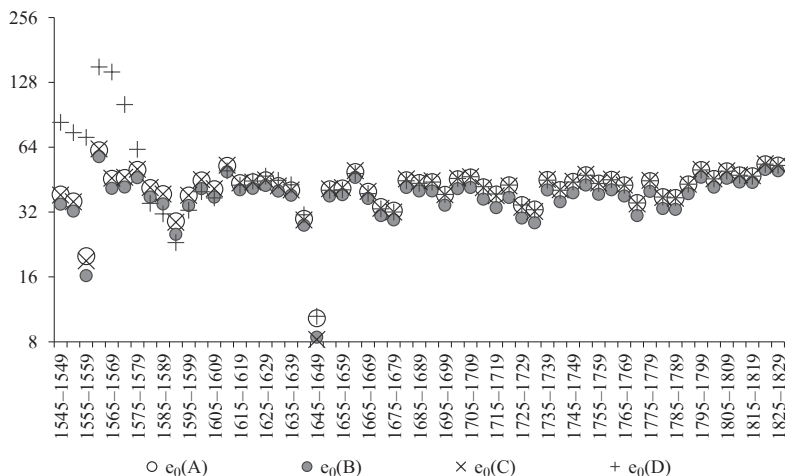
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| 1580-84 | 251 | 153 | 1215 | 1263 | 41,4 | 37,6 | 41,6 | 35,1 | 2,9 | 3,3 | 2,9 | 1,9 |
| 1585-89 | 220 | 166 | 1313 | 1339 | 38,8 | 34,9 | 38,8 | 31,4 | 2,5 | 2,8 | 2,6 | 1,6 |
| 1590-94 | 219 | 227 | 1367 | 1362 | 29,0 | 25,2 | 28,7 | 23,1 | 2,4 | 2,7 | 2,4 | 1,6 |
| 1595-99 | 230 | 169 | 1359 | 1389 | 38,2 | 34,3 | 38,3 | 32,6 | 2,3 | 2,6 | 2,3 | 1,8 |
| 1600-04 | 227 | 141 | 1420 | 1462 | 44,9 | 41,1 | 45,3 | 39,8 | 2,0 | 2,2 | 2,0 | 1,8 |
| 1605-09 | 279 | 181 | 1506 | 1554 | 40,9 | 37,5 | 41,1 | 37,2 | 2,2 | 2,4 | 2,2 | 2,2 |
| 1610-14 | 296 | 129 | 1604 | 1685 | 52,5 | 49,2 | 52,8 | 49,7 | 2,3 | 2,5 | 2,3 | 2,5 |
| 1615-19 | 318 | 195 | 1771 | 1831 | 43,6 | 40,6 | 43,7 | 42,6 | 2,4 | 2,7 | 2,5 | 2,7 |
| 1620-24 | 328 | 201 | 1894 | 1956 | 44,0 | 41,2 | 44,1 | 44,6 | 2,5 | 2,7 | 2,5 | 2,8 |
| 1625-29 | 353 | 206 | 2021 | 2093 | 45,0 | 42,5 | 45,1 | 47,0 | 2,5 | 2,7 | 2,5 | 2,8 |
| 1630-34 | 381 | 242 | 2168 | 2236 | 42,3 | 40,0 | 42,3 | 44,9 | 2,5 | 2,6 | 2,5 | 2,6 |
| 1635-39 | 379 | 267 | 2307 | 2362 | 40,4 | 38,3 | 40,5 | 42,8 | 2,2 | 2,3 | 2,2 | 2,3 |
| 1640-44 | 349 | 378 | 2419 | 2404 | 29,8 | 27,8 | 29,4 | 31,1 | 1,9 | 2,0 | 1,9 | 1,9 |
| 1645-49 | 144 | 579 | 2390 | 2161 | 10,3 | 8,4 | 8,2 | 10,5 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8 |
| 1650-54 | 217 | 187 | 1955 | 1969 | 40,8 | 38,0 | 41,0 | 40,4 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,1 |
| 1655-59 | 228 | 206 | 1985 | 1995 | 41,2 | 38,5 | 41,5 | 40,6 | 1,2 | 1,3 | 1,2 | 1,1 |
| 1660-64 | 221 | 166 | 2007 | 2034 | 49,1 | 46,3 | 49,8 | 48,3 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 1,1 |
| 1665-69 | 210 | 236 | 2062 | 2048 | 39,8 | 37,0 | 39,9 | 39,0 | 1,2 | 1,3 | 1,3 | 1,2 |
| 1670-74 | 170 | 276 | 2036 | 1982 | 33,8 | 30,8 | 33,3 | 33,1 | 1,2 | 1,3 | 1,2 | 1,2 |
| 1675-79 | 175 | 282 | 1930 | 1875 | 32,5 | 29,4 | 32,0 | 32,0 | 1,4 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |
| 1680-84 | 191 | 197 | 1823 | 1820 | 45,0 | 41,6 | 45,6 | 44,7 | 1,6 | 1,7 | 1,6 | 1,6 |
| 1685-89 | 166 | 212 | 1817 | 1793 | 43,7 | 40,1 | 44,2 | 43,5 | 1,3 | 1,4 | 1,4 | 1,4 |
| 1690-94 | 141 | 209 | 1771 | 1736 | 44,1 | 40,1 | 44,7 | 44,1 | 1,1 | 1,2 | 1,1 | 1,2 |
| 1695-99 | 174 | 251 | 1703 | 1664 | 38,5 | 34,4 | 38,5 | 38,6 | 1,5 | 1,6 | 1,5 | 1,5 |
| 1700-04 | 187 | 204 | 1626 | 1617 | 45,5 | 41,1 | 46,0 | 45,8 | 1,7 | 1,8 | 1,7 | 1,7 |
| 1705-09 | 170 | 195 | 1609 | 1596 | 46,3 | 41,6 | 46,7 | 46,7 | 1,6 | 1,7 | 1,6 | 1,6 |
| 1710-14 | 141 | 208 | 1584 | 1550 | 41,7 | 36,7 | 41,5 | 42,0 | 1,3 | 1,4 | 1,3 | 1,3 |
| 1715-19 | 123 | 205 | 1517 | 1475 | 38,6 | 33,5 | 38,1 | 38,8 | 1,2 | 1,3 | 1,2 | 1,2 |
| 1720-24 | 122 | 169 | 1435 | 1411 | 42,6 | 37,4 | 42,3 | 42,7 | 1,2 | 1,3 | 1,2 | 1,2 |
| 1725-29 | 170 | 218 | 1388 | 1363 | 34,5 | 30,0 | 33,7 | 34,5 | 1,6 | 1,8 | 1,6 | 1,6 |
| 1730-34 | 166 | 221 | 1340 | 1312 | 32,9 | 28,5 | 32,2 | 32,8 | 1,6 | 1,8 | 1,6 | 1,6 |
| 1735-39 | 183 | 152 | 1285 | 1300 | 45,1 | 40,5 | 45,4 | 45,0 | 1,9 | 2,1 | 1,9 | 1,9 |
| 1740-44 | 155 | 172 | 1316 | 1307 | 40,5 | 35,7 | 40,6 | 40,4 | 1,7 | 1,9 | 1,7 | 1,7 |
| 1745-49 | 159 | 150 | 1299 | 1303 | 44,2 | 39,3 | 44,5 | 44,1 | 1,9 | 2,1 | 1,9 | 1,9 |
| 1750-54 | 164 | 137 | 1308 | 1321 | 47,5 | 42,7 | 47,9 | 47,4 | 2,0 | 2,2 | 2,0 | 2,0 |
| 1755-59 | 162 | 157 | 1335 | 1337 | 43,4 | 38,7 | 43,6 | 43,4 | 1,8 | 2,0 | 1,8 | 1,8 |
| 1760-64 | 175 | 151 | 1340 | 1351 | 45,2 | 40,6 | 45,5 | 45,2 | 1,8 | 2,0 | 1,8 | 1,8 |
| 1765-69 | 175 | 165 | 1364 | 1368 | 42,6 | 38,0 | 42,7 | 42,6 | 1,7 | 1,9 | 1,7 | 1,7 |
| 1770-74 | 161 | 199 | 1374 | 1354 | 35,3 | 30,8 | 34,9 | 35,3 | 1,6 | 1,7 | 1,6 | 1,6 |
| 1775-79 | 165 | 145 | 1336 | 1345 | 44,6 | 39,9 | 44,9 | 44,7 | 1,6 | 1,8 | 1,6 | 1,6 |
| 1780-84 | 183 | 185 | 1356 | 1355 | 37,6 | 33,2 | 37,4 | 37,6 | 1,8 | 2,0 | 1,8 | 1,8 |
| 1785-89 | 179 | 182 | 1354 | 1352 | 37,2 | 32,9 | 37,1 | 37,3 | 1,7 | 1,9 | 1,7 | 1,7 |
| 1790-94 | 196 | 153 | 1351 | 1372 | 43,0 | 38,9 | 43,1 | 43,1 | 1,9 | 2,1 | 1,9 | 1,9 |
| 1795-99 | 240 | 131 | 1394 | 1447 | 50,2 | 46,4 | 50,5 | 50,2 | 2,3 | 2,6 | 2,4 | 2,3 |
| 1800-04 | 198 | 156 | 1503 | 1523 | 45,6 | 41,7 | 45,6 | 45,6 | 1,9 | 2,1 | 1,9 | 1,9 |
| 1805-09 | 251 | 148 | 1545 | 1595 | 49,5 | 45,9 | 49,7 | 49,5 | 2,4 | 2,7 | 2,4 | 2,4 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|----|
| 1810–14 | 298 | 176 | 1648 | 1707 | 47,4 | 44,1 | 47,6 | 47,4 | 2,7 | 3,0 | 2,7 | 2,7 | |
| 1815–19 | 329 | 191 | 1770 | 1837 | 47,0 | 43,9 | 47,2 | 47,0 | 2,8 | 3,0 | 2,8 | 2,8 | |
| 1820–24 | 331 | 159 | 1908 | 1992 | 53,4 | 50,4 | 53,6 | 53,4 | 2,5 | 2,7 | 2,5 | 2,5 | |
| 1825–29 | 306 | 168 | 2080 | 2147 | 52,6 | 49,7 | 52,8 | 52,6 | 2,1 | 2,3 | 2,1 | 2,1 | |

Źródło: zob. tab. 1; parametry wejściowe dla modeli C (level 13, west, female) i D (level 10, west, female, r 40), odpowiednio: Coale, Demeny, *Regional Model*, 48, 64.

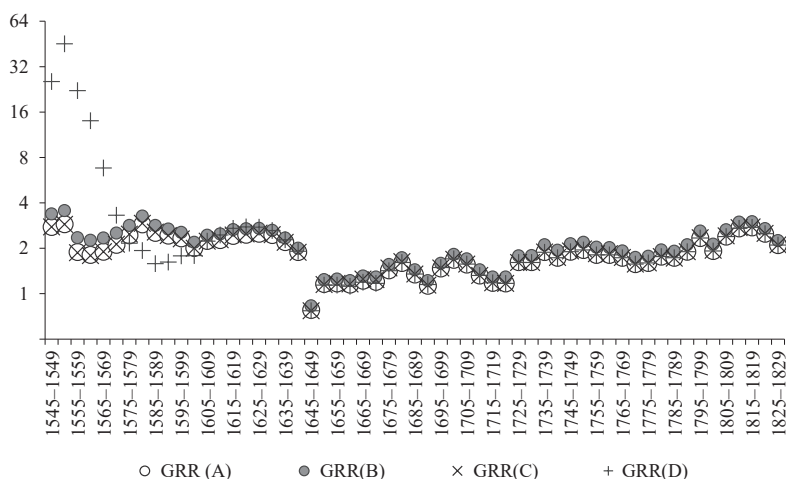
Śledząc parametry dalszego przeciętnego trwania życia w momencie narodzin $e_0(B)$, $e_0(C)$, $e_0(D)$ widać, iż największe rozbieżności występują w przypadku błędnie dobranej struktury wieku populacji (wykres 2). Wartość e_0 osiąga początkowo wręcz abstrakcyjne wartości, jednak wraz z upływem czasu, kiedy liczby urodzeń i zgonów postępują w procesie iteracji, różnice te zanikają. Po około 40 latach wartość e_0 spada do poziomu charakteryzującego model A. Znacznie mniejszy wpływ na poziom tego parametru ma wybór modelowego wzorca umieralności, który w modelu C już w pierwszych kilku okresach projekcji wykazuje zaskakującą zbieżność z danymi uzyskanymi na podstawie danych wejściowych użytych przez Lee. W przypadku modelu B, gdzie do obliczeń przyjęto znacznie niższy stan wyjściowy populacji, różnice w poziomie wartości parametru e_0 są niewielkie, jednak jego wpływ utrzymuje się w zasadzie przez cały okres projekcji.

Wykres 2. Dalsze przeciętne trwanie życia w chwili urodzenia (e_0) w parafii Colyton w latach 1545–1829



Źródło: zob. tab. 1 i 2.

Wykres 3. Współczynnik reprodukcji brutto (GRR) w parafii Colyton w latach 1545–1829



Źródło: zob. tab. 1 i 2.

Obserwacja poziomu współczynnika reprodukcji brutto dla trzech modeli – GRR(B), GRR(C) i GRR(D) dostarcza podobnych wniosków (wykres 3). Także i w tym przypadku dla błędnie przyjętej struktury wieku – model D – widoczne są znaczące różnice w początkowej fazie projekcji. Zostają one jednak zniwelowane już po kilku dziesięcioleciach. Nieistotny natomiast jest wybór stanu początkowego ludności.

Podsumowanie

Opisana powyżej metoda pozwala na uzyskanie cennych charakterystyk badanych populacji, których poznanie jest niemożliwe przy wykorzystaniu klasycznych metod agregatywnych. Z tego powodu dotychczasowe analizy struktury ludności oraz przemian płodności i zmian tablic trwania życia wymagały żmudnej, a często niemożliwej do zastosowania, metody nominatywnej. Metoda projekcji odwróconej umożliwia, przyjmując pewne założenia, zastosowanie w tym celu danych używanych w klasycznych metodach agregatywnych. Z perspektywy demografii historycznej informacje o liczbie ludności na danym terenie, zwłaszcza dla okresu przedstatystycznego, stanowią wartość nie do przecenienia⁴⁴. Dodatkowo, szczegółowe dane o strukturze wieku otwierają drogę do pogłębionych

⁴⁴ Zob. opinię na ten temat: Kukło, „Polska”, 30–31.

analiz demograficznych. Znajomość dalszego oczekiwanego trwania życia w momencie urodzenia czy też syntetycznych mierników rodności w znaczący sposób wzbogaciłyby wiedzę na temat procesów demograficznych zachodzących na ziemiach polskich w okresie przedstatystycznym.

Zważywszy jednak, że podstawowym wymogiem zastosowania projekcji odwróconej jest posiadanie wiarygodnych danych o liczbie urodzeń i zgonów, możliwości wykorzystania metody wydają się ograniczone. W przypadku niektórych krajów Europy Zachodniej rejestracja metrykalna była prowadzona w sposób zadowalający już od końca XVI wieku⁴⁵, niestety w Polsce okres ten należałoby przesunąć na drugą połowę XVIII stulecia⁴⁶.

Należy także pamiętać, że oprócz niewątpliwie najważniejszego czynnika warunkującego poprawność wyników – podstawy źródłowej, metoda narażona jest na wiele innych niebezpieczeństw, mogących podważyć ich wiarygodność. Chodzi tu o założenia, jakimi jest ona uwarunkowana. Jedno z nich to przyjęcie, iż badana populacja nie podlegała migracji. Kolejne wiążą się z doбором parametrów koniecznych do przeprowadzenia projekcji: ustaleniem stanu populacji w momencie rozpoczęcia badania, doboru odpowiedniej struktury wieku, a także poprawnych wzorców umieralności i płodności. Zaprezentowane powyżej symulacje doboru różnych parametrów potwierdzają, iż projekcja odwrócona pozostaje odporna na ich błędny dobór, a prawdziwym zagrożeniem dla wiarygodnych wyników symulacji jest kompletność danych ruchu naturalnego⁴⁷. Dyskutowana może być także zasadność założenia, leżącego u podstaw samej logiki postępowania, które mówi, iż przyjęte parametry wymierania – q_i oraz d_i – są stałe w całym okresie projekcji i zależą wyłącznie od wieku. Zwrócił na to uwagę sam pomysłodawca metody, słusznie przyznając, że mogły się one różnić dla poszczególnych kategorii wieku w sytuacji działania zdarzeń nadzwyczajnych, np. epidemii lub wojen.

Uwzględniając możliwości poznawcze, jakie niesie ze sobą opisywana metoda, można wysnuć wniosek, że stanowi ona doskonałe narzędzie weryfikacji wyników badań nad populacjami historycznymi prowadzonych przy użyciu klasycznych metod. Wspominana wyżej rekonstrukcja rodzin wydaje się jawić jako najdoskonalsza z nich, choć warto pamiętać o jej wadach. Jednym z głównych problemów jest kwestia reprezentatywności otrzymanych wyników. Może ona zostać poddana ocenie właśnie dzięki projekcji odwróconej. Analiza liczb ruchu

⁴⁵ Przykładem niech będzie udana próba rekonstrukcji zaludnienia Anglii w XVI–XIX wieku. Edward Anthony Wrigley, Roger S. Schofield, *The Population History of England, 1541–1871: A Reconstruction* (Cambridge: Cambridge University Press, 1981).

⁴⁶ O kompletności rejestracji metrykalnej na ziemiach polskich zob. Irena Gieysztorowa, „Badania demograficzne na podstawie metryk parafialnych”, *KHKM* 10 (1962), 2: 103–121.

⁴⁷ Szerzej na ten temat zob. McCaa, „Benchmarks”, 43 i n.

naturalnego dla dużych obszarów oraz w długim okresie czasu wydaje się tu nie mieć alternatywy. Dodatkowe parametry, które otrzymujemy, tj. dokładna struktura wieku badanej populacji, czynią projekcję odwróconą pierwszorzędym narzędziem poznawczym. Fakt, że nie doczekała się ona zastosowania w badaniach nad przeszłością demograficzną ziem polskich, powinien zachęcić do podjęcia wysiłków w tym kierunku, zwłaszcza że metoda ta stała się w literaturze światowej punktem wyjścia do rozwoju całej gałęzi narzędzi wspomagających badania populacji historycznych.

Bibliografia

- Arthur, W. Brian. „The Ergodic Theorems of Demography: A Simple Proof”. *IIASA Working Paper* (1981): 1–10.
- Balicki, Andrzej. *Analiza przeżycia i tablice wymieralności*. Warszawa: PWE, 2006.
- Bertino, Salvatore, Eugenio Sonnino. „La proiezione inversa stocastica: tecnica e applicazione”. W: *Le Italie Demografiche. Saggi di demografia storica*, red. Marco Breschi, Giovanna da Molin, Lorenzo del Panta, Luigi Pace. Udine: Dipartimento de Scienze Statistiche, Università degli Studi di Udine, 1995.
- Biraben, Jean-Noël, Noël Bonneuil. „Population et économie en pays de Caux aux XVIe et XVIIe siècles”. *Population* 6 (1986): 937–960.
- Bonneuil, Noël. „The Trend Method Applied to English Data”. W: *Old and New Methods in Historical Demography*, red. David S. Reher, Roger S. Schofield, 57–65. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- Borowski, Stanisław. „Próba odtworzenia struktur społecznych i procesów demograficznych na Warmii u schyłku XVII w. na przykładzie Dobrego Miasta i okolicy”. *Przeszłość Demograficzna Polski* 8 (1975): 125–198.
- Brunborg, Helge. „The Inverse Projection Method Applied to Norway, 1735–1974”. Niepubl., 1976.
- Coale, Ansley J., Paul Demeny, Barbara Vaughan. *Regional Model Life Tables and Stable Populations*. New York: Academic Press, 1983.
- Cohen, Joel B. „Ergodic Theorems in Demography”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 1 (1979), 2: 275–295.
- Gautier, Etienne, Louis Henry. „Crulai. Démographie d’une paroisse normande au XVIIe et au XVIIIe siècles. Présentation d’un cahier de l’I.N.E.D”. *Population* 13 (1958), 2: 283–286.
- Gieysztorowa, Irena. „Badania demograficzne na podstawie metryk parafialnych”. *Kwartalnik Historii Kultury Materialnej* 10 (1962), 2: 103–121.
- Gieysztorowa, Irena. „Niebezpieczeństwa metodyczne polskich badań metrykalnych XVII–XVIII wieku”. *Kwartalnik Historii Kultury Materialnej* 19 (1971), 4: 557–604.
- Hajnal, John. „On Products of Non-negative Matrices”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 79 (1976): 521–530.
- Holzer, Jerzy Z. *Model ludności ustabilizowanej*. Warszawa: SGPiS, 1969.

- Józwiak, Janina. *Matematyczne modele ludności*. Warszawa: SGPiS, 1985.
- Kędelski, Mieczysław. „Piramida wieku i tablice trwania życia ludności Śląska w 1864 roku”. *Przeszość Demograficzna Polski* 20 (1997): 49–73.
- Kędelski, Mieczysław. *Umieralność i trwanie życia ludności Wielkopolski w XIX wieku*. Poznań: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 1996.
- Kędelski, Mieczysław, Jan Paradysz. *Demografia*. Poznań: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 2006.
- Kuklo, Cezary. *Demografia Rzeczypospolitej przedrozbiorowej*. Warszawa: Wydawnictwo DiG, 2009.
- Kuklo, Cezary. „Polska demografia przeszłości u progu XXI wieku”. *Przeszość Demograficzna Polski* 22 (2001), 7–32.
- Lee, Ronald D. *Econometric Studies of Topics in Demographic History*. Niepubl., 1970.
- Lee, Ronald D. „Estimating Series of Vital Rates and Age Structure from Baptisms and Burials: A New Technique, with Applications to Pre-industrial England”. *Population Studies* 28 (1974), 3: 495–512.
- Lee, Ronald D. „Inverse Projection and Back Projection: A Critical Appraisal and Comparative Results for England”, *Population Studies* 39 (1985), 2: 233–248.
- Lotka, Alfred J. „The Structure of the Growing Population”. *Human Biology* 3 (1931), 4: 459–493.
- McCaa, Robert. „Benchmarks for a New Inverse Population Projection Program. England, Sweden, and a Standard Demographic Transition”. W: *Old and New Methods in Historical Demography*, red. David S. Reher, Roger S. Schofield, 40–56. Oxford: Clarendon Press, 1993.
- McCaa, Robert. „Populate: A Microcomputer Projection Package for Aggregative Data Applied to Norway, 1736–1970”. *Annales de Démographie Historique* 2 (1998): 287–298.
- McCaa, Robert. „The Female Population of Chile, 1855–1964: A Microcomputer Balance Sheet Method”. *Latin American Population History Newsletter* 15 (1989): 9–14.
- Okólski, Marek. *Demografia. Podstawowe pojęcia, procesy i teorie w encyklopedycznym zarysie*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2004.
- Piasecki, Edmund. *Ludność parafii bejskiej (woj. kieleckie) w świetle ksiąg metrykalnych z XVIII–XX w.: studium demograficzne*. Warszawa: PWN, 1990.
- Piasecki, Edmund. „Próba sporządzenia okresowych tablic trwania życia na podstawie ksiąg ruchu naturalnego w XVIII–XX w.”. *Przeszość Demograficzna Polski* 16 (1985): 139–152.
- Szulc, Stefan. „Dawne tablice wymieralności Królestwa Polskiego i m. Warszawy”. *Kwartalnik Statystyczny* 5 (1928), 2: 430–444.
- Wachter, Kenneth W. „Ergodicity and Inverse Projection”. *Population Studies* 40 (1986): 275–287.
- Wrigley, Edward Anthony. „Family Limitation in Pre-industrial England”. *Economic History Review* 19 (1966): 82–109.

- Wrigley Edward Anthony. „Mortality in Pre-industrial England: The Example of Colyton, Devon, over Three Centuries”, *Daedalus* 97 (1968), 2: 546–580.
- Wrigley Edward Anthony, R.S. Davies, James E. Oeppen, Roger S. Schofield. *English Population History from Family Reconstitution 1580–1837*. Cambridge, NY: Cambridge University Press, 1997.
- Wrigley Edward Anthony, Roger S. Schofield. *The Population History of England, 1541–1871: A Reconstruction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Projekcja odwrócona (*inverse projection*) jako narzędzie wspomagające poznanie przeszłości demograficznej

Streszczenie

Celem artykułu jest zaprezentowanie cech sprawiających, że metoda projekcji odwróconej (*inverse projection*) stanowi dogodny sposób wnioskowania o zmianach struktury wieku ludności i parametrów demograficznych w badaniach przeszłości demograficznej. W porównaniu z najczęściej wykorzystywaną do tej pory metodą rekonstrukcji rodzin, metoda projekcji odwróconej wymaga mniejszego zakresu danych wejściowych (zagregowane liczby urodzeń i zgonów w kolejnych okresach) oraz stwarza możliwość szerokiego wykorzystywania demograficznych narzędzi w postaci modelowych tablic trwania życia i struktury wieku ludności do tworzenia modeli spójnych z dostępnymi danymi historycznymi. W artykule pokazano ponadto, że dzięki własnościom ergodycznym procesów demograficznych oraz wbudowanemu mechanizmowi autokorekty, niezależnie od przyjmowanych początkowo założeń eksperymentalnych, metoda projekcji odwróconej prowadzi po pewnym czasie do zbliżonych do siebie wyników. Kluczowe dla wiarygodności wyników są jednak informacje źródłowe o ruchu naturalnym ludności.

Słowa kluczowe: projekcja odwrócona (*inverse projection*), twierdzenie ergodyczne, tablice trwania życia, ruch naturalny

Inverse Projection as a Tool That Supports Understanding Demographic Past

Summary

The aim of the article is to present the features revealing that the inverse projection method is a useful tool of inferring the changes in the age structure of the population and demographic parameters while researching the demographic past. Compared to the so far most frequent method of reconstructing families, the inverse projection method requires fewer initial data (aggregated number of births and deaths in the subsequent periods) and creates possibility of how to make the most of demographic tools such as model tables of

life duration and the age structure of the population in order to create coherent models with accessible historical data. In addition, the article proves that thanks to the ergodic properties of demographic processes and the built-in mechanism of self-correction, irrespective of the initial expert assumptions, the inverse projection method finally leads to similar results. The source information on the natural movement of the population is of key importance for the credibility of the results.

Keywords: inverse projection, ergodic theorem, tables of life duration, natural movement