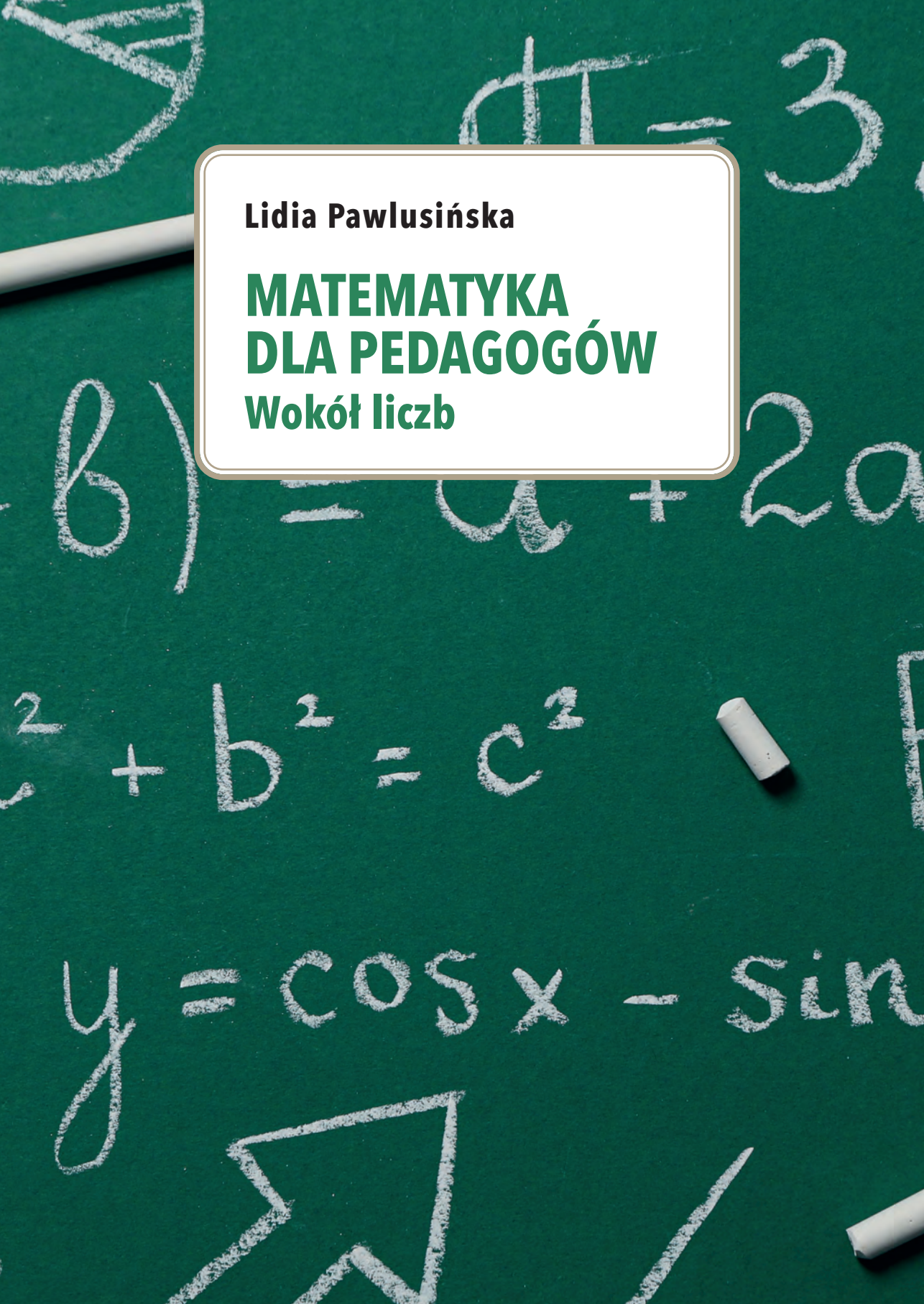


Lidia Pawlusińska

MATEMATYKA DLA PEDAGOGÓW

Wokół liczb

Matematyka dla pedagogów

Wokół liczb

UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
ROZPRAWY I STUDIA T. (MCCCLVIII) 1284

Lidia Pawlusińska

Matematyka dla pedagogów

Wokół liczb

Szczecin 2023

Rada Wydawnicza

Barbara Braid, Anna Cedro, Urszula Chęcińska, Rafał Klóska
Maciej Kowalewski, Ewa Mazur-Wierzbicka, Jarosław Nadobnik
Grzegorz Wejman, Renata Ziemińska, Magdalena Zioło
Andrzej Skrendo – przewodniczący Rady Wydawniczej
Elżbieta Zarzycka – dyrektor Wydawnictwa Naukowego

Recenzent

dr hab. Urszula Oszwa, prof. UMCS

Lidia Pawlusińska ORCID 0000-0003-0311-9755

Redakcja językowa

Joanna Sygit

Redakcja techniczna i skład

Wiesława Mazurkiewicz

Korekta

Paulina Kaczyńska-Domagalska

Projekt okładki

Joanna Dubois-Mosora

Wersja elektroniczna publikacji dostępna na licencji CC BY-SA 4.0
po 12 miesiącach od daty wprowadzenia do obrotu

© Copyright by Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2023

DOI 10.18276/978-83-7972-636-3
ISBN 978-83-7972-636-3 (online)
ISBN 978-83-7972-635-6 (print)
ISSN 0860-2751

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO
Wydanie I | Ark. wyd. 9,0 | Ark. druk. 11,7 | Format 170/240

Spis treści

Wprowadzenie 7

1. Elementy logiki matematycznej 9
   1.1. Zdania złożone 13
   1.2. Wartość logiczna zdań złożonych 25
   1.3. Formy zdaniowe i kwantyfikatory 29
   1.4. Zadania – elementy logiki matematycznej 34

2. Zbiory. Algebra zbiorów 41
   2.1. Zbiory i ich podzbiory, równość zbiorów 45
   2.2. Działania na zbiorach 52
   2.3. Szkolne przykłady nieskończonych zbiorów liczbowych 65
   2.4. Zbiory we wczesnej edukacji 69
   2.5. Zadania – zbiory 76

3. Przyporządkowywanie zbiorów 83
   3.1. Iloczyn kartezjański 85
   3.2. Relacje i ich własności 91
   3.3. Funkcje jako relacje 100
   3.4. Relacja równoliczności zbiorów 112
   3.5. Zadania – przyporządkowywanie zbiorów 115

4. Liczby naturalne 121
   4.1. O podzbiorach zbioru N 129
   4.2. Liczby naturalne w dziesiątkowym systemie pozycyjnym 134
   4.3. O związkach pomiędzy zbiorami i liczbami naturalnymi 136
   4.4. Liczby naturalne we wczesnej edukacji 139
   4.5. Zadania – liczby naturalne 141

5. Niedziesiątkowe systemy pozycyjne 151
5.1. Zadania – niedziesiątkowe systemy pozycyjne 155

6. Liczby dawnych cywilizacji 158
6.1. Zadania – liczby dawnych cywilizacji 165

7. Paradoks Hilberta 168

Odpowiedzi do wybranych zadań 171
Bibliografia 183
Spis rysunków i tabel 185

Wprowadzenie

Niniejsza propozycja nie jest podręcznikiem do matematyki. Co więcej, nie prowadzi czytelnika od opracowanych i usankcjonowanych teorii matematycznych do przykładów, w których prezentowane treści matematyczne mają swoje zastosowanie. Jej konstrukcja przypomina raczej podróż przez pewne obszary matematyki, bo nie wszystko, co dotychczas opisano w ramach działalności matematycznej, zostało tu poruszone. Jednak wybrane przeze mnie treści nie są przypadkowe. Odpowiadają standardom kształcenia nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej w zakresie przygotowania matematycznego (Dz.U. z 2019 r., poz. 1450 z późn. zm.) i koncentrują się na tych treściach matematycznych, które przypisano do kierunku studiów.

Głównym celem tego opracowania jest pogłębienie wiadomości i umiejętności matematycznych studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej oraz dostarczenie przykładów, które po niewielkich modyfikacjach można wykorzystać na zajęciach z edukacji matematycznej w szkole. Chciałabym, aby inspiracje do tworzenia ciekawych lekcji matematyki znaleźli w niej również nauczyciele czynnie pracujący w zawodzie. Prowadząc czytelników przez kolejne strony, starałam się, aby poszczególne rozdziały rozpoczynały się od opisu kontekstów, w których ludzie mogli poczuć potrzebę dokonywania matematyzacji. Rozwiązaniem, które w założeniu ma ułatwić lekturę książki, jest układ treści. Łączy on to, co czytelnik poznał dotychczas, z tym, co dla niego może okazać się nowe. Zależało mi, aby sposób eksponowania treści porządkował dotychczasową wiedzę i uzupełniał ją o nowe spostrzeżenia. Kolejnym, w mojej ocenie ważnym, celem jest połączenie matematyki w całość. Nie mam na myśli tego, że matematyka jest jednolitą i jednobarwną strukturą. Zależy mi raczej na ukazaniu matematyki jako dziedziny, w której kolejne elementy są ze sobą powiązane i w żadnym razie nie stanowią zbioru odrębnie funkcjonujących części wiedzy. Dlatego zaproponowany przeze mnie układ książki uwzględnia dwa ważne aspekty. Pierwszy to

naturalna ludzka potrzeba porządkowania wszystkiego, co nas otacza, a drugi wiąże się z poszukiwaniem sposobów tego porządkowania.

Książka składa się z siedmiu rozdziałów, czterech głównych i trzech uzupełniających. Prezentuję w nich sposoby zapisywania liczb przez starożytne cywilizacje, niedziesiątkowe systemy liczbowe oraz przedstawiam paradoks Hilberta. Podejmując decyzję dotyczącą struktury pracy, przyjęłam narrację, której zadaniem było podkreślenie użyteczności wiedzy matematycznej i jej zdroworozsądkowe postrzeganie w kategoriach dostępności i przystępności. Czytelnik swoją matematyczną przygodę z książką rozpoczyna od podstaw logiki matematycznej – może dlatego, że określa się ją mianem gramatyki języka matematycznego. A może po prostu dlatego, że dobrze rozgrzewa umysł. Jednak najważniejszą cechą charakteryzującą książkę jest układ trzech rozdziałów: drugiego *Zbiory. Algebra zbiorów,* trzeciego *Przyporządkowywanie zbiorów* i czwartego *Liczby naturalne*. Skąd pomysł na takie rozwiązanie? Otóż mam nadzieję, że poprowadzi ono czytelników drogą od gromadzenia obiektów w zbiory do budowania nowych z już istniejących. Umożliwi doszukiwanie się zależności między zbiorami, by odkrywać relacje obejmujące zbiory i ich elementy. Pozwoli czytelnikom zagłębić się w strukturę matematyki, czyli przyjrzeć się konstrukcji nowych pojęć i teorii matematycznych. Wszystko to, zilustrowane przykładami, ma ułatwić dostrzeżenie, że matematyka to nie zestaw procedur, a nauka, której możemy doświadczać już we wczesnej edukacji. Dodatkowo każdy z rozdziałów zawiera krótki zestaw zadań, których rozwiązanie pozwoli czytelnikowi upewnić się, że zrozumiał treści w nim zawarte.

Matematyka dla pedagogów. Wokół liczb jest pierwszą pozycją z zaplanowanego i realizowanego cyklu *Matematyka dla pedagogów.* Pierwsza część, *Wokół liczb,* koncentruje się na liczbach, którymi z taką łatwością posługujemy się w życiu codziennym, druga – *Kształty* – będzie przybliżała matematykę brył i figur płaskich, a trzecia – *O matematyce i jej niektórych zastosowaniach* – zapozna czytelników ze strukturą matematyki oraz na przykładach potwierdzi jej niezbędność.

Mam nadzieję, że czytelnicy będą wracać do lektury niniejszej książki, a przykłady w niej zawarte wykorzystają do pracy z uczniami na najtrudniejszym z etapów edukacyjnych dziecka, czyli w edukacji wczesnoszkolnej.

1. Elementy logiki matematycznej

Każdy nauczyciel logiki bywa od czasu do czasu pytany o cel i sens uczenia się jego dyscypliny. Tadeusz Kotarbiński, wybitny polski uczony, zwykł był w takich sytuacjach mawiać: „pytanie «na co komu logika?» powinno być rozpatrywane jako część szerszego problemu: «na co człowiekowi rozum?»". Kto nie widzi potrzeby uczenia się logiki, ten nie do końca zdaje sobie sprawę z tego, do czego służy rozum. Każdy zaś, kto wie, do czego rozum służy, ma świadomość i tego, jak potrzebne jest wykształcenie jego naturalnej zdolności do jasnego myślenia, ścisłego wypowiadania się i poprawnego uzasadniania głoszonych tez.

Marcin Tkaczyk, *Na co komu logika?*
(źródło: felieton zawarty w arkuszu maturalnym z roku 2015)

Zaprezentowany fragment felietonu w konieczny i wystarczający sposób tłumaczy potrzebę znajomości i kształtowania umiejętności posługiwania się logiką nie tylko do prowadzenia rozumowań matematycznych, ale także do trafnego wnioskowania i poprawnego formułowania myśli. W matematyce to właśnie logikę uczyniono budowniczym odpowiedzialnym za właściwe połączenie elementów wiedzy matematycznej w całe struktury. Nie przypadkowo niniejszy rozdział zatytułowany został *Elementy logiki matematycznej.* Wskazuje to przede wszystkim na fakt, że w treści odwołuję się do umiejętności rozpoznawania zdań logicznych, oceny ich wartości logicznej, umiejętności i oceny wartości logicznej zdań złożonych (proste przykłady) oraz przywołuję przykłady praw rachunku zdań. Taka konstrukcja wiedzy z zakresu logiki matematycznej, wsparta przykładami i opisana sytuacjami z możliwych doświadczeń rzeczywistych, ma przybliżyć treść i zachęcić czytelnika do poszukiwania „nowego" i pogłębiania „starego". Czym zatem jest logika matematyczna i co z niej dobrego dla nas wynika?

Logika (gr. *logos* – rozum, słowo, myśl) to nic innego, jak „nauka o formach i zasadach poprawnego myślenia" (Skorupka i in., 1969, s. 349). Pomaga w jasnym i precyzyjnym formułowaniu wypowiedzi, wnioskowaniu na podstawie uzyskanych informacji, prowadzeniu rozumowań oraz uzasadnianiu własnych stanowisk. Za prekursora logiki w Europie uważa się greckiego filozofa Arystotelesa, który uczynił z logiki metodę porządkowania myśli (Tarski, 2012, s. 20).

To właśnie z niej wywodzi się logika matematyczna, która poprzez zastosowanie języka i metod matematycznych uświadamia i egzekwuje konieczność uściślania pojęć i teorii matematycznych. W literaturze przedmiotu odszukamy, że pierwszym matematykiem, który sformułował koncepcję logiki matematycznej jako rachunku, jest G.W. Leibniz[1]. Kontynuatorami nawiązującymi do prac Leibniza byli G. Boole[2] oraz G. Frege[3] (Trzęsicki, 2008, s. 12). Logika matematyczna, podobnie jak logika tradycyjna, zajmuje się analizą zdań. Zdania w sensie logiki matematycznej nie są równoważne zdaniom budowanym z wykorzystaniem gramatyki języka, którym się posługujemy na co dzień (w naszym wypadku jest to język polski). Logikę matematyczną możemy określić jako zestaw reguł i zasad umożliwiających poprawne konstruowanie wypowiedzi. Poprzez poprawne będziemy rozumieli takie, które nie budzą wątpliwości interpretacyjnej pod warunkiem, że dokonujemy jej na podstawie wspomnianych reguł i zasad. Zatem nie wszystkie zdania, które usłyszymy, możemy określić mianem zdań logicznych.

O zdaniu logicznym

Zdaniem w sensie logiki matematycznej (zdaniem logicznym) będziemy nazywali zdanie oznajmujące, które na gruncie danego języka jednoznacznie pozwala stwierdzić, że *„tak a tak jest”* albo *„tak a tak nie jest”*. Pierwsze z nich będziemy nazywali zdaniem prawdziwym, a drugie fałszywym.

Logika matematyczna zajmuje się właśnie takimi zdaniami. Rozpatrzmy kilka przykładów zdań skonstruowanych zgodnie z regułami obowiązującymi w gramatyce języka polskiego. Spróbujemy rozstrzygnąć, które z nich są zdaniami w sensie logiki matematycznej, a które nie. Rozważmy poniższe przykłady zdań.

(1) Warszawa jest miastem wojewódzkim.
(2) Każde miasto w Polsce jest miastem wojewódzkim.
(3) Czy dzisiaj padał deszcz?

---

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – niemiecki filozof, prawnik, matematyk i dyplomata. Zasłynął jako twórca rachunku różniczkowego i całkowego.

[2] George Boole (1815–1864) – angielski matematyk i filozof. Zasłynął wprowadzeniem metod algebraicznych do logiki.

[3] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925) – niemiecki matematyk, filozof i logik. Podjął się zadania powiązania logiki z matematyką. Jest uważany za największego logika od czasów Arystotelesa.

(4) Szczecin jest najpiękniejszym miastem w Polsce.
(5) Liczba 150 jest bardzo dużą liczbą.
(6) Liczba 31 jest liczbą pierwszą.
(7) Siedem jest liczbą szczęśliwą.
(8) Podnieś tę zabawkę!
(9) $0 \cdot 5 > 0$
(10) Dzisiaj jest ładna pogoda.

Jeśli przyjrzymy się konstrukcji gramatycznej powyższych zdań, od razu możemy wyeliminować przykłady (3) i (8), gdyż nie są to zdania oznajmujące. Zdanie (4) jest wprawdzie zdaniem oznajmującym, ale tylko w sensie gramatyki języka polskiego. Nie jest ono zdaniem logicznym. W jego przypadku nie możemy jednoznacznie stwierdzić, czy jest ono prawdziwe, czy może fałszywe. Dla Kasi, która pochodzi ze Szczecina, to miasto może być najpiękniejszym na świecie, nie tylko w Polsce. Dla Tomka wychowanego w Gdańsku wcale tak być nie musi. Analogiczną sytuację mamy w zdaniu (5), (7) i (10). Tu, w zależności od przekonań osoby oceniającej, pogląd opisany w zdaniach może okazać się prawdziwy lub nie. W przypadku zdań (4), (5), (7) i (10) mamy do czynienia z opinią, a każde zdanie, które jest subiektywną oceną, nie jest zdaniem logicznym. Zauważmy, że umiejętność rozpoznawania i wskazywania zdań w sensie logicznym pozwala nam odróżniać opinię od faktu. Przejdźmy teraz do dotychczas nierozpatrzonych zdań, tj. (1), (2), (6) i (9). Na podstawie definicji dotyczącej zdań logicznych stwierdzamy, że każde z nich nim jest. Zwróćmy uwagę, że zdania (1) i (2) nie mają treści matematycznej, natomiast (6) i (9) już tak. Jednak w każdym z tych przypadków zdania jednoznacznie określają, że „*tak, a tak jest*” albo „*tak, a tak nie jest*”. Zastanówmy się zatem, które z tych zdań są prawdziwe, a które fałszywe. Zdania (1) i (6) są prawdziwe, bo Warszawa faktycznie jest miastem wojewódzkim, a 31 jest liczbą pierwszą (tzn. dzieli się przez 1 i samą siebie). Pozostałe z tych zdań, czyli (2) i (9), są fałszywe. Faktem jest, że nie każde miasto w Polsce jest miastem wojewódzkim i tu nie trzeba nic wyjaśniać, zaś w zdaniu (9) przedstawiona nierówność jest fałszywa, ponieważ iloczyn dowolnej liczby rzeczywistej i zera daje dokładnie zero.

Dla uporządkowania i zwiększenia czytelności tekstu wprowadźmy pewne oznaczenia tak, jak robią to matematycy. Oznaczmy zdania logiczne małymi literami, np. p, q, r, s, t, …, które nazywać będziemy *zmiennymi zdaniowymi*. Z racji tego, że wśród zdań logicznych wyróżniamy zdania fałszywe oraz prawdziwe, to przypiszemy im pewną wartość zwaną *wartością logiczną*.

O wartości logicznej zdań

Niech p będzie zdaniem logicznym. Jeśli p jest zdaniem prawdziwym, to przypisujemy mu wartość 1 i zapisujemy $\omega(p) = 1$ lub zwyczajnie $p = 1$. Jeśli p jest zdaniem fałszywym, to przypisujemy mu wartość 0 i zapisujemy $\omega(p) = 0$ lub zwyczajnie $p = 0$.

Powróćmy jeszcze raz do zdań (1)–(10) i oceńmy ich wartość logiczną. Na podstawie powyższych rozważań możemy stwierdzić, że zdania (1) i (6) mają wartość 1, natomiast zdania (2) i (9) wartość 0. Pozostałych zdań nie uznaliśmy za zdania logiczne, zatem nie możemy dokonać oceny ich wartości. W celu zilustrowania wszystkiego, co dotychczas powiedzieliśmy, przyjrzyjmy się innym przykładom zdań zamieszczonym w tabeli (tab. 1).

Tabela 1. Zdania logiczne i ich wartości

Zdanie p	Rozstrzygnięcie	Wartość logiczna zdania p
Pięć plus trzy równa się osiem	Jest zdaniem logicznym oraz 5 + 3 = 8	$\omega(p) = 1$
Pierwiastek z dwóch jest liczbą wymierną	Jest zdaniem logicznym oraz $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną	$\omega(p) = 0$
Każdy prostokąt jest równoległobokiem	Jest zdaniem logicznym oraz przeciwległe boki są równoległe	$\omega(p) = 1$
Każdy równoległobok jest prostokątem	Jest zdaniem logicznym oraz nie każdy równoległobok ma kąty proste	$\omega(p) = 0$
Dzisiaj jest brzydka pogoda	Nie możemy ocenić wartości logicznej tego zdania, ponieważ w zdaniu przytoczono subiektywną opinię na temat dzisiejszej aury. Podany przykład nie jest zdaniem logicznym	----------
Suma dowolnych liczb rzeczywistych, z których jedna jest dodatnia, a druga ujemna, jest zawsze liczbą ujemną	Jest zdaniem logicznym. Niestety nie zawsze jest prawdziwe, bo gdy do liczby 10 dodam liczbę –4, to suma wynosi 6. Liczba 6 nie jest liczbą ujemną*	$\omega(p) = 0$
Istnieje tylko jedna liczba pierwsza parzysta	Jest zdaniem logicznym oraz liczba 2 jest liczbą pierwszą i jedyną parzystą. Każda następna parzysta dzieli się przez 2, a to skutkuje posiadaniem więcej niż dwóch dzielników	$\omega(p) = 1$

* Oczywiście czytelnik z łatwością dostrzeże przypadki w których rozważane zdanie może być prawdziwe, np. gdy pierwsza liczba wynosi 20, a druga –5. Jednak nasze zdanie mówi o dowolnych liczbach, a tu dowolne oznacza wszystkie liczby rzeczywiste. Zatem aby rozstrzygnąć, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe, wystarczy znaleźć jeden przykład, dla którego suma nie będzie liczbą ujemną (tak, jak zrobiono to w tabeli). Taki przykład obalający pewne twierdzenie matematycy nazywają *kontrprzykładem*.

Źródło: opracowanie własne.

Czytelnik na pewno już dostrzegł, że chcąc dokonać oceny wartości logicznej jakiegokolwiek zdania, musimy rozstrzygnąć, czy jest ono zdaniem logicznym. Dopiero po stwierdzeniu, że jest zdaniem logicznym, decydujemy o jego prawdziwości lub fałszywości.

1.1. Zdania złożone

Oczywiście logika matematyczna nie zajmuje się tylko zdaniami prostymi. Jak to zwykle z ciekawością poznawczą bywa, tak i w tym wypadku możemy postawić kolejne pytania, chociażby: *Czy zdania pojedyncze możemy ze sobą łączyć? A jeśli tak, to w jaki sposób?* Okazuje się, że możemy, i co więcej, dokonamy tego przy niewielkim wysiłku. Zdanie złożone może się składać z dwóch, trzech i więcej zdań pojedynczych, tworząc mniej lub bardziej interesujące przypadki. Do konstruowania zdań złożonych logika matematyczna wykorzystuje tzw. operatory logiczne, czyli *funktory*. Oczywiście w literaturze możemy spotkać inne oznaczenia operatorów niż te zaprezentowane w tabeli 2. Nieistotne jest, z których oznaczeń korzystamy. Ważne jest, aby konsekwentnie korzystać z wybranych oznaczeń w obrębie jednej pracy. I o tym musimy pamiętać.

Tabela 2. Operatory logiczne

Operator logiczny	Nazwa	Zapis symboliczny
$\sim$	negacja	$\sim p$
$\vee$	alternatywa	$p \vee q$
$\wedge$	koniunkcja	$p \wedge q$
$\Rightarrow$	implikacja	$p \Rightarrow q$
$\Leftrightarrow$	równoważność	$p \Leftrightarrow q$

Źródło: na podstawie Semadeni (1979).

Negacja

Do każdego zdania logicznego prawdziwego lub fałszywego możemy zbudować zdanie niosące przeciwną informację, np. dla zdania logicznego *Warszawa jest miastem wojewódzkim* możemy zbudować zdanie:

Warszawa nie jest miastem wojewódzkim.

lub *Nieprawda, że Warszawa jest miastem wojewódzkim.*

Każde z tych zdań jest zdaniem logicznym i możemy ocenić jego wartość. Rozstrzygnęliśmy poprzednio, że Warszawa jest miastem wojewódzkim i jego wartość wynosi 1. Zdanie będące jego zaprzeczeniem – *Warszawa nie jest miastem wojewódzkim* – jest fałszywe, więc ma wartość 0. Należy pamiętać, że nie zawsze budujemy zaprzeczenie tylko do zdania prawdziwego. Może zdarzyć się tak, że zdanie p będzie zdaniem fałszywym (np. *Sopot jest miastem wojewódzkim*), wtedy jego zaprzeczenie będzie zdaniem prawdziwym.

O negacji zdań logicznych

Niech p będzie zdaniem logicznym. Negacją zdania p jest zdanie złożone ~p i czytamy je *Nieprawda, że p.*

Rozważmy inny przykład. Niech dane będzie zdanie p: *Cztery jest liczbą parzystą*. Negację zdania p, czyli ~p, odczytujemy: *Nieprawda, że cztery jest liczbą parzystą* lub *Cztery jest liczbą nieparzystą.* Zwróćmy uwagę, że różne możliwości budowania zdań przeczących znacznie ułatwiają zadanie, szczególnie w sytuacji, gdy pojawią się wątpliwości konstrukcyjne. Warto wtedy pamiętać o formie *Nieprawda, że...* Rozważmy wartości logiczne tych zdań. Zdanie *Cztery jest liczbą parzystą* jest prawdziwe, natomiast jego negacja jest fałszywa. Natomiast dla zdania *Pięć jest liczbą parzystą* mamy fałsz, zatem jego negacja *Pięć jest liczbą nieparzystą* jest prawdziwa. Wartości logiczne zdania i jego negacji w skrócie możemy przedstawić w następujący sposób:

p	~p
1	0
0	1

A co otrzymamy, gdy zbudujemy negację negacji, tj. ~ (~p) lub ~ ~p ? W tym wypadku negację zdania p, dla której ponownie budujemy negację, traktujemy tak jak poprzednio, gdy budowaliśmy negację do zdania wyjściowego p. Sytuacja się powtarza, gdy tych negacji wpiszemy więcej. Poniżej przedstawiono, jak zmienia się wartość logiczna zdań zbudowanych za pomocą kolejnych negacji.

p	~p	~ ~p	~ ~ ~p	~ ~ ~ ~p	…
1	0	1	0	1	
0	1	0	1	0	

Wobec powyższego nietrudno dostrzec, że dopisanie kolejnego operatora negacji zmienia wartość zdania na przeciwną. I tak, w zależności od wartości logicznej zdania początkowego, otrzymujemy na zmianę *prawda, fałsz, prawda,* … lub *fałsz, prawda, fałsz*, … Zabawę z negowaniem negacji możemy kontynuować w nieskończoność. Jednak nie to jest interesujące. Spróbujmy na podstawie dotychczas zgromadzonych informacji sformułować regułę, która uwolni nas od konieczności analizowania krok po kroku kolejnych negacji zwłaszcza wtedy, gdy autor zadania miał fantazję wpisać ich kilkanaście. Na podstawie powyższej tabelki wnioskujemy, że dopisując kolejną negację do poprzedzającej, otrzymamy zdanie o przeciwnej wartości logicznej. Zatem gdy wartość zdania początkowego p była prawdziwa, to zdanie z parzystą liczbą operatorów negacji będzie prawdziwe, natomiast dla nieparzystej liczby negacji otrzymamy zdanie fałszywe. Odwrotnie będzie w przypadku początkowego zdania fałszywego. Dostrzeżenie tej reguły pozwala przy znajomości wartości logicznej zdania początkowego określić wartość logiczną zdania dla chociażby czterdziestu siedmiu operatorów negacji i to bez konieczności oceny wartości kolejnych przekształceń zdania początkowego. A to jest interesujące.

Chciałabym się teraz podzielić z czytelnikami jedną z popularnych zagadek, którą po raz pierwszy usłyszałam na swoich zajęciach z logiki. Myślę, że jest ona dobrym przykładem ilustrującym zastosowanie negacji. Zagadka opowiada o dylemacie wędrowca, który postanowił dotrzeć do miasta, ale niestety nie znał drogi.

A oto ona:

Na rozstaju dróg, z których jedna prowadzi do miasta, a druga na bagna, stoi chatka. W chatce mieszka dwóch braci. Jeden z nich zawsze mówi prawdę, a drugi zawsze kłamie. Wędrowiec, który próbuje dotrzeć do miasta, może

zadać tylko jedno pytanie i tylko jednemu z braci. Jakie pytanie powinien zadać wędrowiec, aby właściwie wybrać drogę do miasta?

Odpowiedź:

Pytanie, które powinien zadać wędrowiec, brzmi: *Którą drogę do miasta wskazałby mi Twój brat?* Po uzyskaniu odpowiedzi wędrowiec powinien pójść drogą niewskazaną przez braci. Przeanalizujmy całą sytuację od początku. Gdy wędrowiec trafi na brata kłamcę, w odpowiedzi usłyszy kłamstwo, mimo że prawdomówny brat wskaże dobrą drogę do miasta. Gdy trafi na prawdomównego brata, ten przekaże mu dokładnie tę informację, którą przekazał mu kłamca. W pierwszym i drugim przypadku uzyskaną odpowiedź należy zanegować, by faktycznie dotrzeć do miasta.

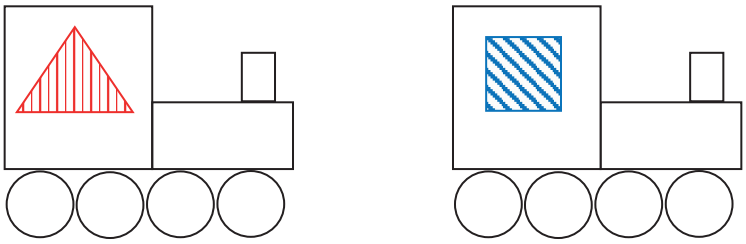
Elementy logiki matematycznej we wczesnej edukacji, czyli zabawa w *Podróże pociągów*

Elementy logiki matematycznej z powodzeniem możemy wprowadzać już na pierwszym etapie edukacyjnym. Oczywiście nie będzie to formalny kurs logiki, który przez najmłodszych uczniów nie byłby zrozumiany. Warto jednak sięgnąć do podręczników metodyki edukacji matematycznej i podjąć wyzwanie. Jedną z najatrakcyjniejszych metod pracy na lekcji, która zawsze spotyka się z powszechną akceptacją uczniów, jest zabawa. Dlatego właśnie proponuję czytelnikom zabawę w *Podróże pociągów*. Do zaproponowania tego rozwiązania zainspirowała mnie książka J. Kaczmarczyk (1983), która prezentuje, w jaki sposób wprowadzić najmłodszych uczniów w świat logiki matematycznej.

Do zabawy potrzebne będą pociągi z figurami geometrycznymi (rys. 1) albo papierowe figury geometryczne. Pociągi oraz figury możemy przygotować w czterech kształtach (koło, kwadrat, prostokąt i trójkąt), trzech kolorach (żółty, niebieski i czerwony) oraz dwóch wielkościach (duży i mały). Łącznie w taki sposób uzyskamy 24 różne figury geometryczne (lub pociągi oznaczone tymi figurami). Jeśli okaże się, że figur nie wystarczy dla wszystkich uczniów, możemy dołożyć np. kolor zielony. W taki sposób zbiór naszych figur powiększy się o 8 elementów. Ponadto do zabawy potrzebujemy zakodowanych „tablic semaforów" i dwóch semaforów – jeden z zielonym, a drugi z czerwonym światłem. Każdy z uczniów odgrywających rolę dróżnika powinien posiadać swój zestaw

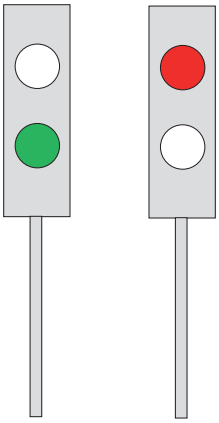
semaforów (rys. 2). Teraz wystarczy wyznaczyć odpowiednią trasę pociągów i można zaczynać zabawę.

Rysunek 1. Przykładowe pociągi



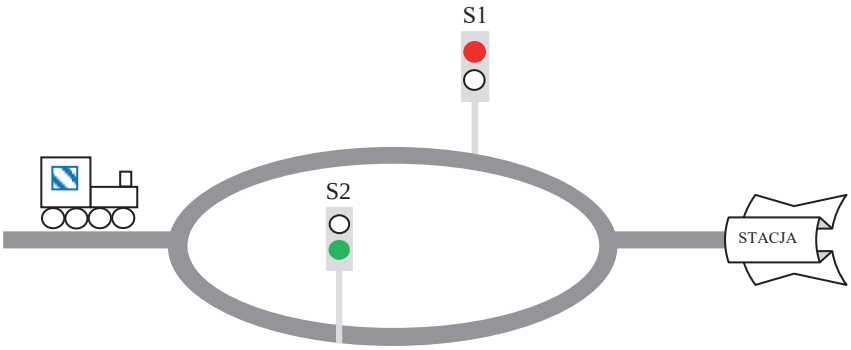
Rysunek 2. Przykładowa „tablica semaforów” i semafory

S2			
□	1	0	1
△	1	1	0
○	0	1	1
▭	0	0	1



Podczas zabawy uczniowie z linii startu muszą dotrzeć do stacji. Aby tego dokonać, należy minąć semafory, które informują o tym, czy droga jest wolna i pociąg może przejechać. Dróżnicy odpowiedzialni za właściwe ustawienia semaforów odczytują informacje zakodowane w „tablicy semaforów”. Jeśli na „tablicy semaforów” widnieje 1, to semafor ma kolor zielony i pociąg może przejechać, w przeciwnym wypadku pociąg się zatrzymuje i wraca na koniec kolejki. Przy ponownej próbie dotarcia do stacji wybiera inną drogę (o ile taka możliwość istnieje). Rozważmy pierwszy schemat trasy pociągów (rys. 3).

Rysunek 3. Układ torów wraz z przykładowym ustawieniem semaforów



W przypadku schematu przedstawionego na rysunku 3 pociąg może do mety dotrzeć dwiema drogami. Analizując układ torów, okazuje się, że pociąg z oznaczeniem duży niebieski kwadrat dotrze do mety, wybierając dolną drogę. Wynika to z informacji zakodowanej w tablicy semaforów na rysunku 2. Przed przystąpieniem do zabawy warto dopytać uczniów, dla jakiego układu świateł na semaforach pociąg zawsze dotrze do stacji. Po tych wstępnych ustaleniach rozpoczynamy zabawę, w której uczniowie zamieniają się rolami, tj. raz są maszynistami lokomotywy, a innym razem dróżnikami odpowiadającymi za właściwe ustawienie światła na semaforze. Wszystkie informacje o podróżach pociągów zbieramy np. w poniższej formie.

								…
S1	1	0	0	1	1	0	1	
S2	1	1	1	1	1	0	0	
S1 ∨ S2	1	1	1	1	1	0	1	

Analiza zapisów zamieszczonych w formie tabelki powinna ułatwić uczniom sformułowanie wniosku mówiącego o tym, że wystarczy, aby na jednym z semaforów paliło się zielone światło, by pociąg dotarł do mety. Rezultatem zabawy powinna być uproszczona tabela, która uwzględnia wszystkie możliwe układy semaforów, a nie wszystkie przypadki podróży pociągów, czyli:

S1	1	1	0	0
S2	1	0	1	0
S1 ∨ S2	1	1	1	0

Czytelnicy, którzy mają już za sobą kurs logiki matematycznej, pewnie dostrzegli, że układy semaforów odpowiadają wartościom logicznym alternatywy dwóch zdań.

Alternatywa

Zanim przejdziemy do zdefiniowania i oceny wartości logicznej alternatywy, rozważmy pewną hipotetyczną sytuację, w której mama posyła syna do piekarni po pieczywo. Załóżmy, że zwraca się do niego słowami: *Kup w piekarni chleb lub kup w piekarni pięć bułek*. Po chwili z piekarni wraca syn i przynosi chleb oraz 5 bułek. Rodzi się pytanie, czy dziecko poprawnie wykonało prośbę matki. To właśnie m.in. takie „dylematy" pozwala rozstrzygać alternatywa, a dokładniej – określa sposób rozpatrywania zdań złożonych skonstruowanych za pomocą operatora *lub*.

O alternatywie zdań logicznych

Niech dane będą zdania logiczne p i q. Alternatywą zdań p i q jest zdanie złożone $p \vee q$, które czytamy *Zdanie p lub zdanie q*.

Powróćmy jeszcze na chwilę do semaforów i zabawy w pociągi. Analizując wszystkie możliwe przypadki, w których pociąg dotrze do stacji, uwzględniliśmy wszystkie możliwe ustawienia dwóch semaforów. Okazuje się, że pociąg nie dotrze do stacji tylko wtedy, gdy na semaforach S1 i S2 będzie czerwone światło. Tak też jest w przypadku alternatywy. Będzie fałszywa (czyli ma wartość logiczną 0) wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa zdania będą fałszywe.

Wartość logiczna alternatywy

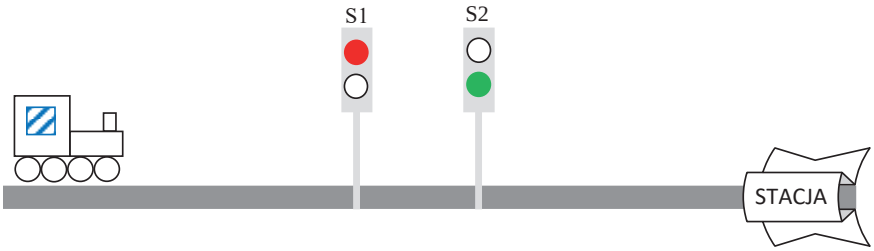
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Wzbogaceni o nowe informacje z łatwością możemy ocenić, że chłopiec postąpił dobrze, przynosząc z piekarni chleb oraz pięć bułek. Co więcej, prośba mamy byłaby spełniona również wtedy, gdyby przyniósł tylko chleb albo tylko pięć bułek. Jedynym możliwym przypadkiem, w którym chłopiec nie wykonałby prośby, byłoby nieprzyniesienie z piekarni ani chleba, ani bułek. Spróbujmy teraz w zdaniu dotyczącym zakupów w piekarni spójnik *lub* zamienić na *albo*. Prośba mamy brzmiałaby wtedy: *Idź do piekarni, kup chleb albo kup pięć bułek.* W taki sposób skonstruowalibyśmy *alternatywę wykluczającą*, która byłaby prawdziwa tylko wówczas, gdyby syn kupił albo chleb, albo bułki. Jeszcze inaczej sytuacja wyglądałaby, gdyby mama zwróciła się do syna słowami: *Idź do piekarni, kup chleb i kup pięć bułek.* Zmiana operatora z *lub* na *i* przywołuje kolejne działanie dwuargumentowe, czyli koniunkcję.

Koniunkcja

Powróćmy do zabawy w *Podróże pociągów*, którą również możemy wykorzystać do wprowadzenia koniunkcji. Zasady są takie same. Zmienia się tylko układ torów, po których poruszają się pociągi. W tym wypadku, aby dotrzeć na stację, należy minąć dwa semafory. Jest to możliwe, gdy na każdym z nich pali się zielone światło. Tak jak poprzednio, możemy posłużyć się tabelkami, które pomogą uczniom sformułować poprawne wnioski. Rozważmy sytuację podaną poniżej.

Rysunek 4. Jednotorowy schemat trasy pociągów



Rysunek 5. Tablice semaforów dla jednotorowej trasy pociągów

S1			
□	0	1	1
△	1	0	0
○	0	1	1
▭	0	0	1

S2			
□	1	0	1
△	1	1	0
○	0	1	1
▭	0	0	1

Na podstawie informacji zakodowanych w „tablicach semaforów" (rys. 5) możemy zbudować poniższą tabelę dla przykładowych pociągów.

								…
S1	0	0	1	1	1	0	1	
S2	1	1	1	1	1	0	0	
S1 ∧ S2	0	0	1	1	1	0	0	

Jej analiza, tak jak w przypadku alternatywy, powinna doprowadzić do uproszczonej formy uwzględniającej wszystkie ustawienia semaforów, czyli:

S1	1	1	0	0
S2	1	0	1	0
S1 ∧ S2	1	0	0	0

Porównując dwa układy torów na rysunkach 3 i 4, nietrudno dostrzec różnicę. Na rysunku 3 podróżujący pociąg ma do wyboru dwie drogi, tj. może minąć semafor S1 lub semafor S2, natomiast na rysunku 4 takiej możliwości nie ma. W tym wypadku pociągi muszą minąć kolejno S1 i S2. Niewielka różnica w układzie torów pociąga za sobą dwie diametralnie różne sytuacje. Ten drugi przypadek prowadzi nas do nieomawianej dotychczas koniunkcji.

O koniunkcji zdań logicznych

Niech dane będą zdania logiczne p i q. Koniunkcją zdań p i q jest zdanie złożone $p \wedge q$, które czytamy *Zdanie p i zdanie q.*

Wartość logiczna koniunkcji

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa tylko wtedy, gdy każde z tych zdań jest prawdziwe. Porównując to z podróżami pociągów, okazuje się, że pociąg dotrze do stacji, gdy na każdym z semaforów będzie paliło się zielone światło.

Implikacja

Implikację matematycy często wykorzystują przy formułowaniu twierdzeń. Przypomnijmy jedno z najpopularniejszych szkolnych twierdzeń, czyli *twierdzenie Pitagorasa*[4].

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Zapisane za pomocą operatora ⇒ przyjmuje postać:

trójkąt jest prostokątny ⇒ suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej

gdzie zdanie logiczne p brzmi: *Trójkąt jest prostokątny*, a zdanie logiczne q: *Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.*

---

[4] Pitagoras (572–497 p.n.e.) – grecki filozof i matematyk znany z twierdzenia o długościach boków trójkąta prostokątnego.

O implikacji zdań logicznych

Niech dane będą zdania logiczne p i q. Implikacją zdań o poprzedniku p i następniku q jest zdanie złożone $p \Rightarrow q$, które czytamy *Jeśli p, to q* lub *z p wynika q*. Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, zaś q jej następnikiem.

Wartość logiczna implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zwróćmy uwagę, że implikacja dwóch zdań jest fałszywa tylko w jednym przypadku, tj. wtedy, gdy poprzednik implikacji jest prawdziwy, a następnik fałszywy. W pozostałych przypadkach mamy zawsze prawdę.

Równoważność

Myślę, że z równoważnością czytelnik również się spotkał w konstrukcji twierdzeń. A dokładniej wtedy, gdy pojawiał się zwrot *wtedy i tylko wtedy, gdy*... Możliwe jest także, że doświadczył tej formy notacji przy obliczaniu miejsca zerowego funkcji, gdy nauczyciel uparcie dążył do przestrzegania konstrukcji zapisu: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ dla $f(x) = 2x + 1$.

O równoważności zdań logicznych

Niech dane będą zdania logiczne p i q. Równoważnością zdań p i q jest zdanie złożone $p \Leftrightarrow q$, które czytamy *p wtedy i tylko wtedy, gdy q* lub *p jest równoważne q*.

Wartość logiczna równoważności zdań jest bardzo intuicyjna. Mówimy, że równoważność jest prawdziwa, jeśli jej zdania składowe są jednocześnie prawdziwe albo fałszywe.

Wartość logiczna równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Przykłady

- Niech zdanie p ma postać: *5 + 5 = 10*, a zdanie q: *17 jest liczbą pierwszą*. Każde z tych zdań jest prawdziwe, więc równoważność tych zdań także.
- Niech zdanie p ma postać: *Każda liczba naturalna jest liczbą nieparzystą*, a zdanie q: *Każda liczba naturalna jest podzielna przez 2*. Równoważność tych zdań jest prawdziwa, bo każde z nich jest fałszywe. Przecież nie każda liczba naturalna jest nieparzysta oraz nie każda liczba naturalna jest podzielna przez 2.
- Niech zdanie p ma postać: *5 + 5 = 11*, a zdanie q: *231 jest liczbą pierwszą* oraz wiemy, że równoważność tych zdań jest prawdziwa. Stąd na podstawie rozstrzygnięcia o fałszywości zdania p możemy orzekać o fałszywości zdania q bez uciążliwego poszukiwania odpowiedzi.

Skonstruujmy trzy przykłady zdań złożonych dla pojedynczych zdań p, q, r, gdzie p oznacza zdanie *Monika rozwiąże wszystkie zadania z podręcznika do matematyki*, q oznacza zdanie *Monika uczestniczy we wszystkich zajęciach z matematyki*, zaś r oznacza zdanie *Monika zda egzamin z matematyki.*

Zdanie złożone 1.

> *Jeśli Monika będzie uczestniczyła we wszystkich zajęciach z matematyki i Monika rozwiąże wszystkie zadania z podręcznika do matematyki, to Monika zda egzamin z matematyki.*

Nasz przykład zapisany za pomocą symboli ma postać: $(p \wedge q) \Rightarrow r$. Ponadto należy zwrócić uwagę na konstrukcję zdania, która nie pomija części zdań pojedynczych p, q, r. Istnieje tu potrzeba powtarzania za każdym razem, że problem kompetencji matematycznych dotyczy Moniki. W naszym zdaniu pojawiły się dwa operatory, tj. operator koniunkcji i implikacji. Ponadto wprowadzono nawias, którego celem jest wyodrębnienie zdań p i q jako pewnej całości. Nawiasy

w logicznych zdaniach złożonych pełnią analogiczną funkcję do nawiasów wykorzystywanych chociażby w działaniach arytmetycznych.

Zdanie złożone 2.

Nieprawda, że jeśli Monika będzie uczestniczyła we wszystkich zajęciach z matematyki, to Monika zda egzamin.

Powyższe zdanie również możemy zapisać za pomocą symboli. Będzie miało postać: $\sim (p \Rightarrow q)$. I tak jak w poprzednim zdaniu, wyraźnie widać korzyści płynące z symbolicznej formy zapisu. Trudność w symbolicznej prezentacji zdań złożonych kryje się w opanowaniu umiejętności posługiwania się operatorami logicznymi.

Zdanie złożone 3.

Nieprawdą jest, że jeśli Monika będzie uczestniczyła we wszystkich zajęciach z matematyki i Monika rozwiąże wszystkie zadania z podręcznika do matematyki, to Monika zda egzamin z matematyki.

Zdanie trzecie zapisane za pomocą symboli ma postać: $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow r]$. W tym zdaniu pominięcie nawiasu kwadratowego skutkowałoby zanegowaniem tylko $(p \wedge q)$, a to nie byłoby zgodne ze zdaniem przedstawionym w postaci słownej.

Myślę, że podane przykłady trzech zdań złożonych zwróciły uwagę czytelnika na łatwość, z jaką możemy tworzyć własne. Jednak budowanie zdań logicznych złożonych po pewnym czasie przestaje być interesujące. Spróbujemy teraz zastanowić się nad wartością logiczną zdań złożonych. Może poszukiwania w tym zakresie okażą się bardziej ekscytujące.

1.2. Wartość logiczna zdań złożonych

Spróbujmy ocenić wartość logiczną następujących zdań $(p \wedge q) \wedge s$ oraz $p \wedge (q \vee r)$ dla $p = 1$, $q = 1$, $s = 1$, $r = 0$. W celu wyznaczenia wartości logicznych tych zdań złożonych skorzystamy z tabeli wartości logicznych alternatywy oraz koniunkcji. Przypominam, wprowadzone w zapisie nawiasy pełnią taką samą funkcję, jak

nawiasy w działaniach arytmetycznych, tj. wyznaczają kolejność dla składowych zdania złożonego. Przeanalizujmy krok po kroku wartość logiczną tych zdań.

- Dla $(p \wedge q) \wedge s$ mamy:
  - skoro $p = 1$, $q = 1$, to $(p \wedge q)$ ma również wartość 1 (wynika z wartości logicznej koniunkcji),
  - i dalej, skoro $(p \wedge q)$ ma wartość 1 i $s = 1$, to $(p \wedge q) \wedge s$ ma wartość 1 (na podstawie wartości logicznej koniunkcji dwóch zdań).
- Dla $p \wedge (q \vee r)$ mamy:
  - skoro $q = 1$ i $r = 0$, to $q \vee r$ ma wartość 1 (wynika z wartości logicznej alternatywy),
  - i dalej, skoro $(q \vee r)$ ma wartość 1 i $p = 1$, to $p \wedge (q \vee r)$ ma wartość 1 (na podstawie wartości logicznej koniunkcji tych dwóch zdań).

Okazuje się, że dla podanych wartości p, q, r, s powyższe zdania są prawdziwe. Sprawdźmy, czy postępując analogicznie, jak w powyższych przypadkach, czytelnikowi uda się ocenić wartość logiczną zdań złożonych podanych w tabeli 3[5]. Tu, tak jak poprzednio, dla zdań złożonych wybrano dowolne wartości.

Tabela 3. Wartości logiczne wybranych zdań złożonych

Lp.	Zdanie złożone	Wartość logiczna zdań				
		p	q	r	s	złożonego
1	$(p \wedge q) \wedge s$	1	1	0	1	1
2	$p \wedge (q \wedge r)$	1	0	0	1	0
3	$(p \vee q) \vee s$	1	1	0	1	1
4	$(p \wedge q) \Rightarrow s$	1	0	0	1	1
5	$(p \wedge q) \wedge r$	0	1	0	1	0
6	$p \vee (q \vee s)$	1	0	1	1	1
7	$p \wedge (q \vee r)$	1	1	0	1	1
8	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	1	1	0	1	1

Źródło: opracowanie własne.

5 W tabeli umieszczono odpowiedzi, aby czytelnik mógł sprawdzić swoje rozwiązania.

Zauważmy, że wartości logiczne podanych zdań złożonych (ostatnia kolumna w tab. 3) w niektórych wypadkach mają wartość 1, a w innych 0. Powróćmy na chwilę do zdania $(p \wedge q) \wedge s$, które dla wartości $p = 1$, $q = 1$ i $s = 1$ było prawdziwe. Teraz, gdy zmienimy wartość jednego ze zdań, np. $p = 0$, to okazuje się, że całe zdanie będzie miało wartość 0. Spróbujcie napisać własne zdanie złożone i przyjmijcie dla jego składowych dowolne wartości. Co uzyskaliście? Być może udało się zbudować zdanie, które przy wybranych wartościach logicznych zdań składowych dało zdanie prawdziwe. Jednak to ciągle jest tylko szczególny przypadek. Czy zatem wasze zdanie będzie prawdziwe dla dowolnych wartości zdań składowych? Właśnie nad tym teraz będziemy się zastanawiać.

Z tabeli 3 ponownie wybieramy dwa zdania złożone, które wyglądają podobnie, tj. $p \vee (q \vee s)$ oraz $(p \vee q) \vee s$. Niestety ktoś dopisał w nich nawiasy. Czy oznaczają to samo? Matematyk spytałby, czy te zdania są równoważne? Aby to sprawdzić, skorzystamy z tzw. metody zero-jedynkowej. Polega ona na tym, że sprawdzamy wszystkie możliwe układy wartości logicznych zdań składowych i na ich podstawie oceniamy wartość zdania złożonego. Rozważmy zatem następujące zadanie:

Sprawdź, czy zdanie $[p \vee (q \vee s)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee s]$ *jest prawdziwe dla dowolnych p, q, s.*

Do rozwiązania zadania wykorzystamy zbudowaną w tym celu tabelę 4. Sami zobaczycie, jak tabela w prosty sposób porządkuje wszystkie możliwe układy wartości logicznych zdań pojedynczych. Dla dokładnej prezentacji kolejnych kroków rozwiązania, oprócz kolumn z wartościami p, q, s i całego zdania złożonego, umieszczono kolumny pozwalające ocenić wartość logiczną poszczególnych składowych zdania. I tak równoważność rozdzielono na dwie części (zob. kolumna 6 i 7 w tab. 4), czyli lewą i prawą stronę równoważności. W każdej z nich wyszczególniono nawiasy (patrz kolumna 4 i 5 w tab. 4). Oczywiście liczba kolumn tabeli pomocniczej zależy od osoby rozwiązującej zadanie. Jedyną wskazówką są indywidualne preferencje rozwiązującego, tak jak wtedy, gdy zmagamy się z rozbudowanym działaniem arytmetycznym, decydując, które przekształcenia wykonamy w pamięci.

Wskazówki do uzupełnienia tabeli 4:

- W kolumnach 1, 2 i 3 należy uwzględnić wszystkie możliwe kombinacje wartości pojedynczych zdań logicznych.

- Kolumny 4 i 5 możemy uzupełnić na podstawie tabeli określającej wartości logiczne alternatywy. Przypominam, że alternatywa ma wartość 0 tylko wtedy, gdy oba jej zdania przyjmują wartość 0.
- Wartości w kolumnie 6 są wartościami alternatywy kolumn 1 i 5. To na ich podstawie uzupełniamy kolumnę 6. Analogicznie postępujemy wypełniając kolumnę 7, gdzie bierzemy wartości z kolumn 3 i 4.
- W kolumnie 8 mamy równoważność dla wartości z kolumn 6 i 7.
- Jeśli w kolumnie 8 otrzymamy same jedynki, to zdanie złożone (w naszym wypadku równoważność) jest prawdziwe dla dowolnych wartości logicznych zdań pojedynczych.

Tabela 4. Zastosowanie metody zero-jedynkowej do oceny prawdziwości zdania złożonego

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	s	$(p \vee q)$	$(q \vee s)$	$p \vee (q \vee s)$	$(p \vee q) \vee s$	$p \vee (q \vee s) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee s$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Źródło: opracowanie własne.

W kolumnie 8 uzyskaliśmy same jedynki. Na tej właśnie podstawie możemy twierdzić, że zdanie $p \vee (q \vee s) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee s$ jest prawdziwe dla dowolnych p, q, s. Rozważane zadanie sugeruje, że zdania złożone możemy podzielić na te, które są zawsze prawdziwe, i pozostałe. Nas będą interesowały te zdania złożone, które dla wszystkich swoich wartości są zawsze prawdziwe.

O prawie rachunku zdań

Prawem rachunku zdań (inaczej tautologią) nazywamy zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe, bez względu na wartości logiczne zdań składowych.

A oto kilka przykładów zdań zawsze prawdziwych:

I	$\sim[p \wedge (\sim p)]$	*prawo sprzeczności*
II	$p \vee (\sim p)$	*prawo wyłącznego środka*
III	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$	*prawo podwójnej negacji*
IV	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	*prawo przemienności koniunkcji*
V	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	*prawo przemienności alternatywy*
VI	$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	*prawo łączności koniunkcji*
VII	$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \ \ (q \vee r)]$	*prawo łączności alternatywy*
VIII	$[(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(\sim q \Rightarrow \sim p)]$	*prawo transpozycji*
IX	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$	*I prawo de Morgana*
XI	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$	*II prawo de Morgana*
XII	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	*prawo przechodniości*
XIII	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	*prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji*
XIV	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	*prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy*

Zachęcam czytelników do podjęcia wyzwania. Spróbujcie przekonać się, że potraficie wykazać prawdziwość powyższych zdań metodą zero-jedynkową.

1.3. Formy zdaniowe i kwantyfikatory

Do tej chwili zajmowaliśmy się zdaniami logicznymi, czyli takimi, dla których z całą pewnością mogliśmy określić ich prawdziwość bądź fałszywość. Teraz przyjrzymy się formom gramatycznym zawierającym zmienną, które dopiero po przekształceniu stają się zdaniami logicznymi.

Niech dane będzie zdanie logiczne *Szczecin jest miastem wojewódzkim*. Spróbujmy teraz zapisać to samo zdanie za pomocą zmiennej, tj. *Polskie miasto x jest miastem wojewódzkim*. Z racji tego, że w drugim zdaniu nie podano konkretnego

miasta, nie możemy ocenić, czy jest prawdziwe, czy fałszywe. Tak naprawdę w naszym zdaniu w miejsce *polskie miasto x* możemy podstawić dowolną miejscowość, która aktualnie posiada prawa miejskie. Gdybyśmy teraz w miejsce *polskie miasto x* podstawili Świnoujście, znów uzyskalibyśmy zdanie logiczne, z tym, że fałszywe. W matematyce takie wyrażenia, dla których zamiast konkretnego przykładu wstawia się zmienne, wykorzystuje się bardzo często.

O formie zdaniowej

Formą zdaniową określoną w zbiorze A nazywamy każde zdanie zawierające zmienną i które przekształci się w zdanie logiczne, gdy tylko w miejsce zmiennej podstawimy dowolną wartość ze zbioru A. Zbiór A będziemy nazywali zbiorem określoności formy zdaniowej lub zakresem formy zdaniowej.

Przykład

- Niech *Polskie miasto x leży nad Odrą* będzie formą zdaniową, dla której zbiorem określoności formy będzie zbiór wszystkich polskich miast. Aby zamienić je w zdanie logiczne, wystarczy wybrać jedno z nich, np. Wrocław. Wtedy otrzymujemy zdanie logiczne *Wrocław leży nad Odrą* i jest ono prawdziwe. Gdy za zmienną podstawimy *Kraków*, okazuje się, że utworzone zdanie logiczne będzie fałszywe. Zatem jeśli po podstawieniu wybranego elementu z zakresu formy zdaniowej uzyskujemy zdanie prawdziwe, to mówimy, że wybrany element spełnia formę zdaniową. W przeciwnym wypadku powiemy, że jej nie spełnia. Zbiór wszystkich elementów spełniających daną formę zdaniową nazywamy *zbiorem prawdziwości* tej formy, natomiast pozostałe tworzą zbiór zwany *zbiorem fałszywości*.

Rozważmy teraz sytuację, w której każdy element należący do zakresu formy zdaniowej ją spełnia, np. wystarczy dla formy zdaniowej *Polskie miasto x leży nad Odrą* zakresem uczynić zbiór miast, przez które Odra rzeczywiście przepływa. W taki sposób dla każdego elementu z takiego zbioru otrzymalibyśmy zdanie prawdziwe.

O formie zdaniowej tożsamościowej i sprzecznej

Jeżeli formę zdaniową spełnia każdy element należący do jej zakresu, to taką formę nazywamy formą zdaniową tożsamościową. Gdy żaden element zakresu formy zdaniowej nie spełnia, nazywamy ją formą zdaniową sprzeczną.

Przykład

Niech zakresem pewnej formy zdaniowej będzie zbiór liczb rzeczywistych. Przykładem formy zdaniowej tożsamościowej w zbiorze liczb rzeczywistych będzie nierówność: $x^2 + 2022 > 0$, zaś przykładem formy zdaniowej sprzecznej w tym samym zakresie równanie $x^2 = -1$. Z formami zdaniowymi sprzecznymi oraz tożsamościowymi spotkaliście się na lekcjach matematyki. Chociażby wtedy, gdy rozwiązywaliście równanie bądź nierówność.

Ustaliliśmy już na początku, że matematycy w celu uproszczenia zapisów wprowadzają symbole. Tak też będzie i w tym wypadku. Dowolną formę zdaniową o zmiennej x będziemy oznaczali p(x), q(x), s(x), … Zapiszemy teraz definicję form zdaniowych równoważnych przy użyciu symboli.

O formach zdaniowych równoważnych

Niech dane będą dwie formy zdaniowe p(x) oraz q(x) określone w zbiorze A. Jeżeli każdy element spełniający formę p(x) spełnia formę q(x) i odwrotnie, to nazywamy je formami zdaniowymi równoważnymi i zapisujemy $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

Zanim przejdziemy dalej, spróbujmy za pomocą przykładów uporządkować sobie wszystko, co dotychczas powiedzieliśmy o formach zdaniowych. Na początek rozstrzygnijmy, które z poniższych zdań jest formą zdaniową, a które zdaniem logicznym.

(1) *Księżyc jest satelitą Ziemi.*
(2) *Liczba k jest liczbą niewymierną.*
(3) *Suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 200°.*
(4) $5 + 6 = 11$
(5) $x + 2 < 3$
(6) $x^2 = 4$

Spośród tych sześciu zdań tylko w przypadku (1), (3) i (4) możemy ocenić wartość logiczną. Zdania (1) i (4) są prawdziwe i przyjmują wartość 1, natomiast (3) jest zdaniem fałszywym[6], czyli ma wartość 0. W trzech pozostałych przykładach, tj. (2), (5) i (6) zapisano formy zdaniowe, dla których należy wskazać zakres zmienności. I tak w przypadku (2) do zbioru określoności formy zdaniowej możemy zaliczyć wszystkie liczby, których kwadraty są liczbą naturalną. Dzieląc cały zakres zmienności rozważanej formy zdaniowej na dwa rozłączne zbiory, tj. zbiór liczb, których kwadraty są liczbami pierwszymi oraz na te, których kwadraty nie są liczbami pierwszymi, otrzymujemy dwa zakresy. Teraz, wybierając element z pierwszego z nich, otrzymamy zdanie logiczne prawdziwe. W podobny sposób możemy rozważać zakresy zmienności form zdaniowych (5) i (6), aby wskazać zbiory prawdziwości bądź fałszywości podanych form zdaniowych.

Przyjrzyjmy się teraz kolejnym formom zdaniowym określonym w zbiorze liczb rzeczywistych. Zbiór liczb rzeczywistych będziemy oznaczali przez R.

(7) $(a^2 + 2a + 1) = (a + 1)^2$
(8) $x^3 = 8$
(9) $y^2 = -1$

Nietrudno orzec, że (7) jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a, (8) jest prawdziwa tylko dla x = 2, zaś (9) nie będzie prawdziwa dla żadnej liczby rzeczywistej. Możemy zapisać to prościej:

(10) dla każdej liczby rzeczywistej a mamy $(a^2 + 2a + 1) = (a + 1)^2$
(11) istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x^3 = 8$
(12) nie istnieje liczba rzeczywista y taka, że $y^2 = -1$

W zapisach pojawiają się zwroty *dla każdego* oraz *istnieje.* Są one na tyle często wykorzystywane w matematyce, że postanowiono je zapisać za pomocą specjalnych znaków. I tak $\forall_x$ czytamy *dla każdego x,* a $\exists_x$ czytamy *istnieje x.* Zatem (10), (11) i (12) możemy zapisać[7]:

(13) $\forall_{a \in R}(a^2 + 2a + 1) = (a + 1)^2$
(14) $\exists_{x \in R}\, x^3 = 8$
(15) $\sim(\exists_{y \in R}\, y^2 = -1)$

---

[6] Przypomnienie: suma miar katów w trójkącie wynosi 180°.
[7] Zapis ($a \in R$) czytamy *a należy do zbioru liczb rzeczywistych* (*R*).

Symbole $\forall$ oraz $\exists$ nazywamy kwantyfikatorami[8]. Pierwszy z nich – *ogólnym* lub *dużym*, drugi *małym*, *szczegółowym* lub *egzystencjonalnym*. Oczywiście w jednym zdaniu może występować więcej niż jeden kwantyfikator.

Zastanówmy się teraz, jak kwantyfikatory mogą wpływać na formy zdaniowe. Na pewno czytelnik dostrzegł, że jeśli formę zdaniową poprzedzimy kwantyfikatorem, to możemy orzekać o prawdziwości lub fałszywości. I tak zdaniami prawdziwymi będą

$$\forall_{a\in R}\,(a + 1)^2 \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \exists_{a\in R}\, a^2 - 16 = 0$$

a zdaniami fałszywymi

$$\exists_{a\in R}\,(a + 1)^2 < 0 \quad \text{oraz} \quad \forall_{a\in R}\, a^2 - 16 = 0$$

Matematycy formy zdaniowe i kwantyfikatory często wykorzystują do zapisu twierdzeń, chociażby

$$(*)\ \forall_{x,\, y\in R}\, \exists_{z\in R}\, [(x + y) \cdot z = 0]$$

co czytamy: *Dla każdych liczb rzeczywistych x i y istnieje liczba rzeczywista z taka, że iloczyn sumy liczb x i y oraz liczby z wynosi 0.* Oczywiście wszyscy wiemy, że istnieje dokładnie jedna taka liczba rzeczywista z, która dla dowolnych $x, y \in R$, spełnia równość $(x + y) \cdot z = 0$ i jest nią 0.

W naszym przykładzie mamy połączenie dwóch kwantyfikatorów oraz trzech zmiennych, co pokazuje, że matematycy z powodzeniem wykorzystują formy zdaniowe oraz kwantyfikatory dla większej liczby zmiennych. Ponadto w przypadku, gdy daną formę zdaniową spełnia dokładnie jeden element należący do jej zakresu, tak jak ma to miejsce w omawianym zdaniu, to nasze wyrażenie (*) możemy zapisać:

$$(**)\ \forall_{x,\, y\in R}\, \exists'_{z\in R}\, ((x + y) \cdot z = 0)$$

Symbol $\exists'_z$ odczytujemy jako: *Istnieje dokładnie jeden element x taki, że…*

---

[8] Możemy się spotkać z innym oznaczeniem kwantyfikatorów. Duży kwantyfikator często oznaczany jest $\wedge$, a mały $\vee$.

1.4. Zadania – elementy logiki matematycznej

Zadanie 1.1

Przyjrzyj się uważnie poniższej pracy plastycznej[9]. Kasia w następujący sposób opisała rysunek:

Na rysunku znajdują się domy, drzewa i staw. Po ulicy jadą trzy samochody. Na trawniku bawią się trzy kotki. W parku za drogą spaceruje sześć osób.

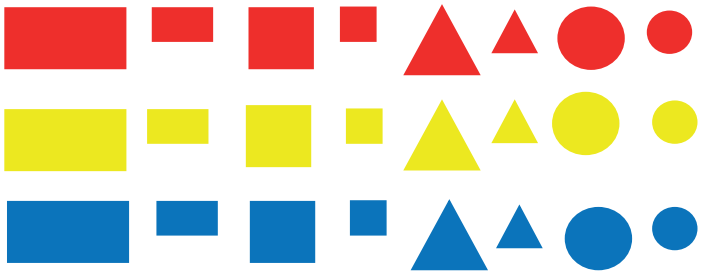
Które informacje podane w opisie Kasi są prawdziwe, a które nie zgadzają się z rysunkiem? Ułóż kilka zdań uzupełniających opis Kasi tak, aby był on zgodny z tym, co przedstawia praca dziecka.

Zadanie 1.2

Na poniższym rysunku przedstawiono figury. Spośród nich wybrano wszystkie duże kwadraty i prostokąty oraz wszystkie małe nieokrągłe figury, a następnie umieszczono je w pętli. Które z tych figur znalazły się poza pętlą?

---

[9] Rysunek wykonała moja pięcioletnia wówczas córka Iga.



Na podstawie zbudowanego przez Ciebie układu figur (w pętli i poza nią) oceń, które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe.

a) W pętli znajduje się mały żółty prostokąt.
b) W pętli znajduje się duży czerwony kwadrat.
c) W pętli znajduje się małe czerwone koło.
d) W pętli znajdują się wszystkie trójkąty.
e) W pętli nie znajdują się wszystkie koła.
f) Poza pętlą znajdują się duże koła i duże trójkąty.
g) Poza pętlą znajdują się duże i małe kwadraty.
h) Poza pętlą znajdują się wszystkie trójkąty.

Zaproponuj dwa zdania prawdziwe oraz dwa zdania fałszywe dla rozważanego w zadaniu układu figur. Zastanów się, czy możemy zmienić układ figur tak, aby zdania prawdziwe wymienione w podpunktach od a) do h) były fałszywe i odwrotnie, zdania fałszywe stały się prawdziwe. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 1.3

Które z poniższych zdań nie jest zdaniem logicznym?

a) Podaj mi książkę!
b) Warszawa jest stolicą Francji.
c) Ziemia jest planetą.
d) Cztery jest liczbą całkowitą.
e) Małgosiu, nie biegaj!
f) Czy lubisz matematykę?
g) Dodawanie liczb naturalnych jest łączne.
h) $x - 1 > 0$
i) $x + 3 < 0$
j) Trójkąt prostokątny ma dwa kąty proste.
k) Suma kątów trójkąta wynosi 180°.

Zadanie 1.4

Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?

a) Suma dowolnych dwóch liczb parzystych jest nieparzysta.
b) Iloczyn dowolnej liczby parzystej i liczby nieparzystej jest zawsze liczbą nieparzystą.
c) Istnieje tylko jedna liczba parzysta.
d) Różnica dwóch liczb naturalnych jest zawsze dodatnia.
e) Liczba zmniejszona o 4 i dodana do dowolnej liczby naturalnej daje sumę mniejszą o 4 od poprzedniej sumy.
f) Każde dwie liczby naturalne zawsze różnią się o jeden.
g) Każdy trójkąt ma boki równej długości.
h) Każda liczba podzielna przez 10 jest również podzielna przez 5.

Zadanie 1.5

Zanotuj za pomocą symboli:

a) implikację zbudowaną z negacji zdania p oraz alternatywy zdań q i s,
b) koniunkcję zbudowaną z implikacji zadania p i q oraz z negacji s,
c) równoważność zbudowaną z alternatywy zdań p i q oraz negacji koniunkcji tych zdań,
d) równoważność zbudowaną z alternatywy zdań p i q oraz koniunkcji negacji zdania p oraz zdania q,
e) implikację, której poprzednikiem jest negacja zdania p, a następnikiem alternatywa zdań q i r.

Zadanie 1.6

Jakim spójnikiem logicznym można połączyć dwa zdania fałszywe, aby otrzymać zdanie prawdziwe?

a) spójnikiem koniunkcji,
b) spójnikiem alternatywy,
c) spójnikiem implikacji,
d) nigdy nie otrzymamy zdania prawdziwego.

Zadanie 1.7

Jakim spójnikiem logicznym można połączyć dwa zdania prawdziwe, aby otrzymać zdanie fałszywe?

a) spójnikiem koniunkcji,
b) spójnikiem alternatywy,
c) spójnikiem implikacji,
d) nigdy nie otrzymamy zdania fałszywego.

Zadanie 1.8

Ojciec obiecywał synowi, że kupi mu rower, o ile będzie miał na świadectwie ocenę bardzo dobrą z języka polskiego i bardzo dobrą z matematyki. W jakich przypadkach syn nie spełni tego warunku[10]?

Zadanie 1.9

Ojciec obiecywał córce, że kupi jej rolki, o ile będzie miała na świadectwie ocenę bardzo dobrą z języka polskiego lub bardzo dobrą z matematyki. W jakich przypadkach córka nie spełni tego warunku?

Zadanie 1.10

Które z podanych wyrażeń są prawami rachunku zdań?

a) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
b) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
c) $p \Rightarrow \sim (p \vee q)$

Zadanie 1.11

Posługując się metodą zero-jedynkową udowodnij następujące tautologie.

a) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow \{[p \wedge (\sim r)] \Rightarrow (\sim q)]\}$
b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

---

[10] Zadanie zaczerpnięte z książki Z. Semadeniego „Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci”.

Zadanie 1.12

Które z poniższych praw opisanych słowami jest tautologią?

a) równoważność dowolnego zdania p i jego negacji,
b) alternatywa dowolnego zdania p i jego negacji,
c) koniunkcja dowolnego zdania p i jego negacji,
d) implikacja dowolnego zdania p i jego negacji.

Zadanie 1.13

Stosując prawa de Morgana, podaj zdanie równoważne podanemu.

a) Nieprawda, że pójdę do filharmonii lub pójdę do teatru.
b) Nie mam odrobionego zadania z matematyki i nie mam odrobionego zadania z fizyki.
c) Nieprawda, że mam 22 lata i mieszkam w Gdańsku.

Zadanie 1.14

Mam przed sobą kilka krążków w dwóch kolorach, niebieskie oraz czerwone. Wybieram kolejno dwa krążki. Odpowiedz, której pary krążków przy podanej informacji nie uzyskamy.

Informacja: *Nieprawdą jest, że pierwszy jest czerwony lub drugi jest czerwony.*

a) czerwony, niebieski,
b) niebieski, czerwony,
c) niebieski, niebieski,
d) czerwony, czerwony.

Zadanie 1.15

Która z poniższych informacji pozwala ustalić jednoznacznie wartość logiczną zdania p?

a) Koniunkcja zdania p i pewnego zdania q jest prawdziwa.
b) Alternatywa zdania p i pewnego zdania q jest prawdziwa.
c) Implikacja, której poprzednikiem jest zdanie p, jest zawsze prawdziwa.
d) Równoważność zdania p i pewnego zdania q jest prawdziwa.

Zadanie 1.16

Znajdź taką wartość zmiennej a, z, y, t, dla której poniższa forma zdaniowa jest prawdziwa.

a) $(a^3 = -8) \wedge$ (a jest liczbą rzeczywistą)
b) $(z < z + 3) \vee (z^4 = 1)$
c) $(y > 5) \Rightarrow (y - 15 < 0)$
d) $(t - 5 = 20) \Leftrightarrow (t^2 = 25)$

Zadanie 1.17

Oceń wartość logiczną poniższych zdań.

a) $\forall_{x \in R} \exists_{y \in R} (x + y = 0)$
b) $\forall_{x \in R} \forall_{y \in R} \exists_{z \in R} (x + z = y)$

Zadanie 1.18

Dla poniższych form zdaniowych ułóż po jednym zdaniu z użyciem kwantyfikatorów $\forall$, $\exists$.

a) $x > y$
b) $x \cdot y = 1$
c) $x \cdot y = 0$
d) $x + y = 0$

gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi. Określ prawdziwość zbudowanych przez siebie zdań.

Zadanie 1.19

Na wyspie, gdzie mieszkają tylko prawdomówni i kłamcy, spotkana przypadkowo osoba powiedziała: *Jestem kłamcą.* Czy ta osoba jest mieszkańcem wyspy? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 1.20

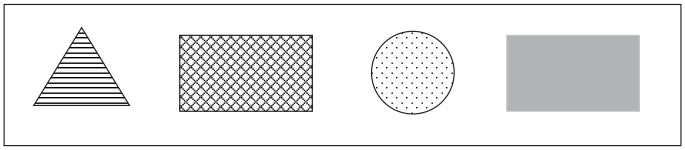
Każda z osób: A, B, C albo jest prawdomówna, albo jest kłamcą. Osoba A powiedziała: *My wszyscy jesteśmy kłamcami.* Osoba B powiedziała: *Tylko jeden z nas jest kłamcą.* Osoba C kłamie, czy mówi prawdę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 1.21

Od poniedziałku do środy Marek zawsze kłamie. W pozostałe dni tygodnia mówi prawdę. Pewnego dnia Marek spotkał Marię i powiedział dwa zdania: *Wczoraj kłamałem*. *Od pojutrze przez dwa kolejne dni będę kłamał*. W jakim dniu Marek spotkał Marię? Odpowiedź uzasadnij[11].

Zadanie 1.22

Na poniższym pasku przedstawiono figury geometryczne przygotowane przez Krzysia podczas zajęć z edukacji matematycznej.



Oceń wartość logiczną zdania: *Wśród figur Krzysia znajdują się dwa prostokąty lub znajdują się dwa koła*.

[11] Zadania od 1.19 do 1.21 zaczerpnięto z miniatury „Zadania logiczne" Wydawnictwa Aksjomat. Bardzo polecam czytelnikom lekturę tej pozycji. Znajdziecie w niej Państwo bardzo ciekawe zadania, które pojawiały się na konkursach matematycznych na przestrzeni lat.

2. Zbiory. Algebra zbiorów

Za datę „narodzin" teorii zbiorów uznaje się 7 grudnia 1873 roku. Jest to data podana w liście Georga Cantora[1] do Richarda Dedekinda[2] (Sporer, 1987, s. 15), w którym autor pisał o ilości liczb naturalnych i rzeczywistych. Jednak nie były to pierwsze rozważania dotyczące zbiorów. Myślę, że zbiory, a dokładniej ich istnienie, zawdzięczamy jednej z głównych cech ludzkości, czyli nieodpartej potrzebie gromadzenia różnych obiektów. Jednak samo gromadzenie nie przynosi takiej satysfakcji jak porównywanie, np. kto ma więcej. Mimo że tak funkcjonujące w codzienności zbiory miały początkowo niewiele wspólnego z matematyką, to przy uwzględnieniu cech ewolucji i wrodzonego dążenia do rozwoju mogło to przyczynić się do stanu, który mamy obecnie. Warto podkreślić, że matematyków nie interesują dowolne zbiory. Nie są zainteresowani zbiorami, które w przypadkowy, chaotyczny sposób zgromadzono w obrębie jednej kolekcji. To, co ich interesuje, to zbiory zawierające nieprzypadkowe elementy, czyli takie, które spośród innych wyróżnia posiadanie określonej cechy. O takich zbiorach będę pisała na kolejnych stronach, choć może się zdarzyć, że zupełnie przypadkowe zbiory również się pojawią. Najprawdopodobniej będą wykorzystywane do ilustrowania prezentowanych treści matematycznych. Taka forma wizualizacji treści matematycznych zdarza się często i w żaden sposób nie będę prekursorem takiego rozwiązania.

Zbiór jest słowem wykorzystywanym w mowie potocznej. Mówimy o zbiorze eksponatów w muzeum, o zbiorze książek w bibliotece, o zbiorach antyków, medali i wielu innych przedmiotów. W każdym z przytoczonych przykładów słowo zbiór jest użyte w znaczeniu kolekcji pewnych egzemplarzy, które z takich czy innych przyczyn są jego obiektami. Obiekty te nazywamy *elementami*

---

[1] Georg Cantor (1845–1918) – profesor matematyki i filozofii w Halle. Uznany za twórcę współczesnej teorii zbiorów.

[2] Richard Dedekind (1831–1916) – profesor matematyki, wprowadził do matematyki takie pojęcia, jak grupa Dedekinda czy pierścień Dedekinda. Przyjaźnił się z G. Cantorem.

zbioru. W matematyce słowa *zbiór* nie definiujemy. Jest ono pojęciem pierwotnym i wykorzystujemy je do definiowania innych pojęć. To samo dotyczy elementów zbioru. Mówimy, że element należy do zbioru, jeśli wchodzi w skład jego kolekcji, tj. jest jednym z jego obiektów. I przeciwnie, nie należy do zbioru, jeśli nie jest obiektem kolekcji. Z tego wynika, że elementu zbioru również nie definiujemy. Określamy go na podstawie warunku opisującego kolekcję pewnych obiektów (egzemplarzy) (Semadeni, 1979, s. 91). Rozważmy poniższe przykłady zbiorów i ich elementy.

Przykłady

- Zbiór uczniów klas trzecich Szkoły Podstawowej nr 45 w Krakowie. Elementami tego zbioru będą uczniowie uczęszczający w roku szkolnym 2021/2022 do klas 3a, 3b oraz 3c.
- Zbiór klocków Jenga Classic w grze zręcznościowej. Elementami tego zbioru będą poszczególne drewniane prostopadłościenne klocki. Natomiast plastikowe klocki Lego nie będą elementami tego zbioru.
- Zbiór polskich rzek, którego elementami będą rzeki płynące przez nasz kraj. Natomiast Ren, mimo że jest rzeką, nie jest elementem zbioru, bo płynie w kraju naszych sąsiadów. Mówimy wtedy, że Ren nie należy do zbioru polskich rzek.

Podane przykłady opisują słownie zbiory i elementy, które do nich należą. Tak jak zaprezentowano, mogą być zdefiniowane za pomocą warunku słownego, ale mogą też być określone poprzez wypisanie wszystkich jego elementów, np. kozaki, botki, i śniegowce, czyli zbiór butów zimowych Pani Kowalskiej. Jednak nie każdy opis grupy elementów możemy uznać za zbiór. Trudności pojawiające się przy określaniu zbiorów wynikają z niejednoznacznego warunku opisującego przynależne do niego elementy – chociażby zbiór pięciu liczb, dla którego nie potrafimy jednoznacznie wskazać tych, które rzeczywiście się w nim znajdują, czy zbiór ziaren piasku na plaży w Międzyzdrojach, tak jakby było oczywiste, w którym dokładnie miejscu zaczyna się i kończy plaża. Innymi przykładami zbiorów niejednoznacznie określonych będą np. zbiór wszystkich talerzy w restauracji, zbiór dziesięciu liczb naturalnych czy zbiór krzeseł w sklepie meblowym. W każdym z tych przypadków niejednoznacznie określono warunek, który muszą spełniać elementy, aby je zakwalifikować do zbioru. Dla restauracji i sklepu meblowego nie określono adresu. To spowoduje, że wygląd zbioru będzie się zmieniał,

gdy tylko wskażemy inne miejsce. W przypadku liczb naturalnych nie określono natomiast warunku, według którego mamy dokonać wyboru tych liczb. Tu każdy nasz wybór może gromadzić zupełnie inny zestaw liczb.

Zbiory w matematyce oznaczamy dużymi literami, np. zbiór uczniów z przykładu pierwszego oznaczymy U, zbiór klocków Jenga Classic przez K, natomiast zbiór polskich rzek przez R. Dobór liter w tym wypadku zależy od podmiotu rozważającego dane zbiory. Obowiązkowa staje się natomiast konsekwencja zachowania oznaczeń podczas całości rozważań o danym zbiorze. Elementy zbioru oznaczamy małymi literami, np. elementy zbioru X oznaczamy x_1, x_2, x_3, …, co ułatwia dalsze działania na tym zbiorze. Do oznaczania zbiorów często używamy nawiasów klamrowych {…}. Wewnątrz takiego nawiasu umieszczamy elementy należące do zbioru. I tak w przypadku miast wojewódzkich w Polsce (oznaczmy ten zbiór przez W) uzyskujemy zapis:

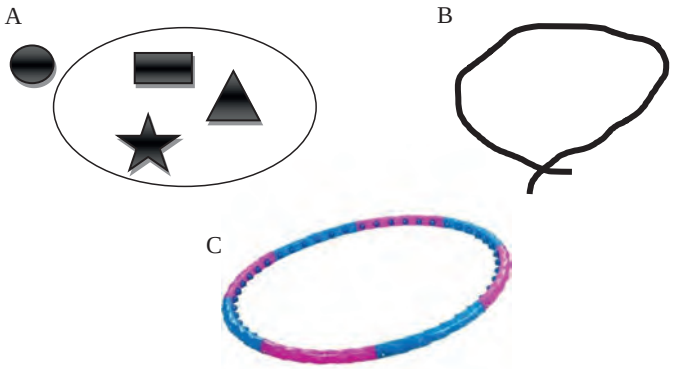
$$W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{16}\}$$

gdzie w_1, w_2, …, w_{16} to kolejne miasta wojewódzkie.

Na podstawie powyżej określonego zbioru miast wojewódzkich możemy stwierdzić, że w_2 jest elementem zbioru W. Ten fakt symbolicznie zapisujemy jako $w_2 \in W$ i czytamy w_2 *należy do* W. Dla przykładu weźmy miasto Goleniów, które oznaczymy przez *g*. Nie jest ono elementem zbioru W. Symbolicznie zapiszemy, że $g \notin W$ i będziemy czytać g *nie należy do* W. A co w sytuacji, gdy mamy zbiór, do którego nie potrafimy przypisać żadnego elementu, np. zbiór ludzi, którzy mają żółte oczy? Taki zbiór, który nie posiada żadnego elementu, nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy Ø.

W edukacji matematycznej bardzo często wykorzystujemy graficzne prezentacje zbiorów. Reprezentacją graficzną zbioru jest linia krzywa zamknięta, a w przypadku ćwiczeń praktycznych wykonywanych we wczesnej edukacji – zbiór symbolizuje pętla wykonana ze sznurka lub tasiemki czy hula hop (rys. 6). Wszystkie elementy znajdujące się w pętli należą do zbioru, a znajdujące się poza nią już nie. Tak też jest w przypadku zbioru A (rys. 6), którego elementami są prostokąt, trójkąt i gwiazdka, zaś koło znajdujące się poza pętlą nie jest elementem tego zbioru.

Rysunek 6. Reprezentacje graficzne zbiorów



Pętla czy linia symbolizująca zbiór nie jest żadną z figur geometrycznych. Jest to krzywa zamknięta nieograniczająca swoim zakresem żadnego zbioru punktów płaszczyzny. Powinna być traktowana jako symbol ułatwiający wskazanie elementów należących do zbioru i znajdujących się poza nim. Właśnie takie rozwiązanie jest najczęściej wykorzystywane we wczesnej edukacji. Powinniśmy pamiętać, że prezentacja graficzna zbiorów na rysunku 6 nie jest tożsama z tzw. diagramami Venna[3]. Diagramy Venna rysujemy, analizując zbiory z nieskończoną liczbą elementów i przy założeniu, że nie są one punktami płaszczyzny (Semadeni, 1979, s. 94). Prezentacje graficzne zbiorów mają pomóc w porównywaniu, analizowaniu i wnioskowaniu. My również będziemy ilustrowali pewne zależności w takiej formie.

W matematyce wykorzystujemy wiele sposobów na określenie zbiorów. Chciałabym zwrócić uwagę na kilka z nich, bo błędna interpretacja może prowadzić do nieporozumień. Wspominałam już o opisie słownym, prezentacji w formie schematu z wykorzystaniem obiektów rzeczywistych, rysunkach i klamrach. Właśnie przy klamrach {…} chciałabym się chwilkę zatrzymać. Porównajmy następujące zbiory:

(1) {a, b, c} (2) {{a}, b, c}

Zbiór oznaczony przez (1) jest bardzo klarowny i nie budzi wątpliwości. Nie mamy także trudności ze wskazaniem elementów należących do tego zbioru.

[3] John Venn (1834–1923) – angielski pastor i naukowiec zajmujący się matematyką, logiką i filozofią.

Mimo swojej klarowności posiada pewną wadę, którą matematycy nazywają niepraktycznością formy zapisu. Wystarczy wyobrazić sobie zbiór zawierający 2022 elementy. Wypisanie ich wszystkich między klamrami zajęłoby zbyt wiele czasu. Dlatego matematycy, dążąc do elegancji i prostoty przekazu, zamieniliby zapis na taki, który zawiera określoną cechę wszystkich elementów należących do tego zbioru, np.

- Niech A będzie zbiorem wszystkich miast Europy. Zamiast wypisywać wszystkie miasta, co zajęłoby dużo czasu, możemy zapisać prościej:

$$A = \{x\text{: x jest miastem w Europie}\}$$ [4]

- Niech B będzie zbiorem liczb całkowitych większych od 10 i jednocześnie mniejszych od 1000. W prostszej formie wygląda to następująco:

$$B = \{x \in C\text{: } 10 < x < 1000\}$$

Poświęćmy teraz chwilę zbiorowi oznaczonemu przez (2). Niewiele różni się od pierwszego, bo wprowadzono w nim tylko dodatkową klamrę na a. Niestety wprowadzenie dodatkowej klamry skutkuje zmianą elementów w tym zbiorze w porównaniu ze zbiorem (1). Elementami tego zbioru są zbiór jednoelementowy zawierający element a, element b oraz element c. W tej sytuacji powinna pojawić się wątpliwość. Czy a jest elementem zbioru (2)? Otóż nie. Analizując elementy należące do zbioru (2), stwierdzamy, że $\{a\} \in \{\{a\}, b, c\}$, natomiast zapis $a \in \{\{a\}, b, c\}$ jest niepoprawny.

2.1. Zbiory i ich podzbiory, równość zbiorów

Ustaliliśmy już, że zbiory mogą zawierać dowolną liczbę elementów. Mimo że matematycy nie uznają zbiorów o skończonej liczbie elementów za interesujące, to do ilustrowania wybranych i prezentowanych treści z teorii zbiorów pozwolę sobie takie zbiory wykorzystywać.

Rozważmy dwa zbiory. Pierwszy będzie zbiorem wszystkich zabawek znajdujących się we wskazanym przedszkolu. Jeśli teraz spośród wszystkich zabawek wybierzemy lalki (zakładamy, że wśród tych zabawek znajdują się lalki), to powstała kolekcja będzie również zbiorem. Z racji tego, że każda lalka jest zabawką,

---

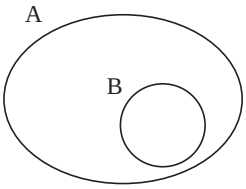
[4] Dwukropek wykorzystany w zapisie klamrowym czytamy *takie, że…* lub *takich, że…*

możemy powiedzieć, że zbiór wszystkich lalek da się wyodrębnić ze zbioru zabawek. Oznacza to dokładnie tyle, że każda lalka jest zabawką, ale nie każda zabawka musi być lalką. Z analogiczną zależnością spotkaliście się na szkolnych lekcjach matematyki w przypadku prostokątów i kwadratów. Wszyscy wiemy, że każdy kwadrat jest prostokątem, ale nie każdy prostokąt jest kwadratem. Opisane sytuacje wprost prowadzą do zależności między zbiorami, gdzie jeden ze zbiorów zawiera wszystkie elementy drugiego zbioru.

O podzbiorze zbioru

Zbiór B jest podzbiorem zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu x ze zbioru B zachodzi warunek: *jeśli* $x \in B$, *to* $x \in A$. Mówimy wtedy, że zbiór B zawiera się w zbiorze A i zapisujemy $B \subset A$ lub $A \supset B$. Znak $\subset$ nazywamy znakiem inkluzji, a zbiór A nadzbiorem zbioru B.

Symbolicznie możemy to zapisać:
$(B \subset A) \Leftrightarrow (\forall_{x \in B}\, x \in A)$



Przykłady

- A – zbiór wszystkich uczniów Szkoły Podstawowej nr 45 w Szczecinie
  B – zbiór wszystkich uczniów klas drugich Szkoły Podstawowej nr 45 w Szczecinie.
  Między zbiorami A i B zachodzi relacja $B \subset A$.
- A – zbiór wszystkich jezior w Polsce
  B – zbiór wszystkich jezior na Warmii i Mazurach.
  Między naszymi zbiorami zachodzi relacja $B \subset A$.
- Niech $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ i $B = \{1, 4, 16\}$, zatem $B \subset A$.

Analizując powyższe przykłady, widzimy, że każdy element ze zbioru B należy do zbioru A. Zatem na mocy powyższej definicji B jest podzbiorem zbioru A. Natomiast jeśli zbiór B nie jest podzbiorem zbioru A, to zapiszemy $B \not\subset A$ lub $\sim (B \subset A)$. Spróbujmy teraz na podstawie definicji podzbioru zdefiniować zbiór, który nie jest podzbiorem wskazanego zbioru.

O zbiorze niebędącym podzbiorem

Zbiór B nie jest podzbiorem zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy nie każdy element ze zbioru B jest elementem zbioru A. Zatem istnieje co najmniej jeden element w B, który nie należy do A. Mówimy wtedy, że zbiór B nie zawiera się w zbiorze A i zapisujemy $B \not\subset A$.

Symbolicznie możemy to zapisać: $\sim (B \subset A) \Leftrightarrow (\exists_{x \in B}\, x \notin A)$.

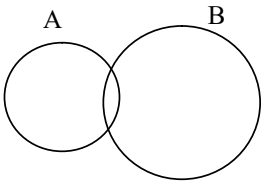
Powyższa definicja wynika bezpośrednio z definicji podzbioru. Jednak umieściłam ją celowo. Proszę przyjrzeć się samej konstrukcji tej definicji. Nie jest ona niczym innym jak negacją definicji poprzedzającej. Budowanie takich definicji, przy znajomości elementów logiki, nie powinno przysparzać czytelnikom trudności.

Przejdźmy teraz do przykładów ilustrujących zależności między zbiorami takimi, że żaden z nich nie jest podzbiorem drugiego zbioru.

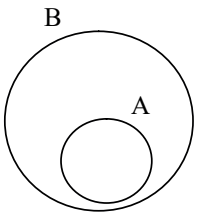
Przykłady

- Zbiór dzielników liczby 16 nie jest podzbiorem zbioru dzielników liczby 24, bo 16 nie jest dzielnikiem liczby 24. Odnosząc się do tego, co dotychczas powiedzieliśmy, z łatwością dostrzegamy, że istnieje element (u nas 16) nienależący do zbioru dzielników liczby 24. Zbiór dzielników liczby 24 również nie jest podzbiorem dzielników liczby 16, bo 6 nie dzieli 16 bez reszty.
- Graficzne relacje między zbiorami A i B, gdzie B nie jest podzbiorem zbioru A, znajdują się na poniższych rysunkach. Co więcej, na rysunku 8 mamy sytuację, w której zbiór A jest podzbiorem zbioru B.

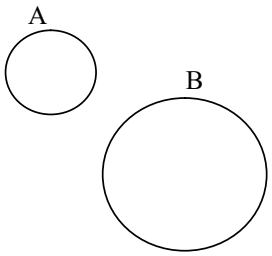
Rysunek 7



Rysunek 8



Rysunek 9



Zastanówmy się, czy istnieje związek między liczbą elementów w zbiorze a liczbą jego podzbiorów. W tym celu rozważymy dwa zbiory skończone A = {1, 2} i B = {x, y, z}, dla których będziemy budować podzbiory. Strategia przyjęta podczas wypisywania wszystkich podzbiorów ma duże znaczenie. Chaotyczne wypisywanie podzbiorów może skutkować pominięciem któregoś z nich. Na taką trudność możemy się natknąć szczególnie wtedy, gdy zbiór, dla którego budujemy podzbiory, składa się z większej liczby elementów niż zaproponowane zbiory A i B. Dlatego warto przed przystąpieniem do realizacji zadania zastanowić się nad strategią. Proponuję, aby kolejno wypisywać podzbiory zawierające jeden element danego zbioru, następnie dwa elementy, kolejno trzy elementy itd.

Zanim jednak rozpoczniemy, musimy pamiętać, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. Co więcej, zbiór pusty jest też swoim własnym podzbiorem. Skąd taki pomysł? Odpowiedź jest bardzo prosta i wynika z definicji zbioru niebędącego podzbiorem rozważanego zbioru. Mianowicie – przypuśćmy, że zbiór pusty nie będzie podzbiorem pewnego zbioru K, zatem w zbiorze pustym istnieje co najmniej jeden element, który nie należy do K, a znajduje się w zbiorze pustym. Nie jest to oczywiście prawdą, bo przyjęliśmy, że zbiór pusty to taki zbiór, który nie posiada żadnego elementu. Przystąpmy teraz do wyznaczenia wszystkich podzbiorów zbiorów A i B.

Przykłady

- Podzbiory zbioru A = {1, 2} to:
  - zbiór pusty Ø
  - podzbiory jednoelementowe {1}, {2}
  - podzbiory dwuelementowe {1, 2}.
- Podzbiory zbioru B = {x, y, z} to:
  - zbiór pusty Ø
  - podzbiory jednoelementowe {x}, {y}, {z}
  - podzbiory dwuelementowe {x, y}, {x, z}, {y, z}
  - podzbiory trzyelementowe {x, y, z}.

Już po tych dwóch przykładach dostrzegamy, że czym więcej elementów ma dany zbiór, tym więcej podzbiorów tego zbioru możemy zbudować. Kwestię liczebności możliwych do uzyskania podzbiorów wskazanego zbioru zaczęto analizować dokładniej. Okazuje się, że istnieje sposób na podanie liczby podzbiorów bez konieczności wypisywania ich wszystkich. Zanim jednak określimy, w jaki

sposób wyznaczyć liczbę podzbiorów, przyjrzyjmy się jeszcze raz naszym przykładom. Dla dwuelementowego zbioru A otrzymaliśmy 4 podzbiory, a dla trójelementowego B uzyskaliśmy 8 podzbiorów. Z tych dwóch przykładów niewiele możemy wywnioskować. Rozszerzmy nasze poszukiwania o więcej przypadków. Dla zbioru jednoelementowego uzyskamy dwa podzbiory, zbiór pusty zawiera tylko jeden podzbiór (siebie samego), zbiór czteroelementowy będzie ich miał 16. Zestawiając nasze spostrzeżenia, otrzymujemy:

przykładowy zbiór	liczba elementów w zbiorze	liczba możliwych podzbiorów
Ø	0	1
K = {1}	1	2
A = {1, 2}	2	4
B = {x, y, z}	3	8
C = {a, b, c, d}	4	16

W ostatniej kolumnie naszego zestawienia pojawiły się kolejne potęgi liczby 2, które właśnie są podstawą do wyznaczania liczby wszystkich możliwych podzbiorów danego zbioru. Zgodnie z zapisem ostatniej kolumny tabelki, gdy zbiór będzie miał 6 elementów, to liczba jego podzbiorów jest równa $2^6 = 64$. Jeśli przyjmiemy, że istnieje zbiór n-elementowy, to liczba wszystkich możliwych podzbiorów tego zbioru jest równa 2^n.

Pamiętajmy również o tym, że podzbiór danego zbioru jest także zbiorem. I jeszcze jedno spostrzeżenie związane z przykładem, które zasługuje na naszą uwagę – podzbiór dwuelementowy zbioru A jest taki sam, jak zbiór A, oraz podzbiór trzyelementowy zbioru B jest taki sam, jak zbiór B. Takie podzbiory nazywamy *niewłaściwymi* i zapisujemy inkluzję zbiorów przez $\subseteq$. Jak zatem określić podzbiór, który będzie właściwy?

O podzbiorach właściwych

Podzbiór B zbioru A nazywamy właściwym, jeśli istnieje co najmniej jeden element w zbiorze A, który nie należy do zbioru B.

Powróćmy jeszcze na chwilę do podzbiorów niewłaściwych. Ustaliliśmy, że podzbiór niewłaściwy danego zbioru zawiera takie same elementy, co zbiór,

z którego ten podzbiór wyodrębniono. Inaczej – zbiór i jego podzbiór niewłaściwy są sobie równe. W taki sposób otrzymujemy kolejną definicję.

O zbiorach równych

O dwóch zbiorach A i B mówimy, że są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy. Zbiory równe oznaczamy A = B. Symbolicznie możemy to zapisać:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall_x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Zbiory równe możemy definiować za pomocą inkluzji zbiorów (zawierania się zbiorów), tj. zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $A \subset B$ i $B \subset A$. Symbolicznie możemy to zapisać:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall_{x \in A}\ x \in B \wedge \forall_{x \in B}\ x \in A)$$

Rozważmy kilka przykładów zbiorów i zastanówmy się, które z nich są równe.

Przykłady

- Niech dane będą zbiory A = {0, 0, 1, 2} i B = {0, 1, 2, 2}. Zbiory A i B są sobie równe, ponieważ każdy element zbioru A znajduje się w B, tj. $0 \in B$, $1 \in B$ oraz $2 \in B$, a także każdy element ze zbioru B należy do zbioru A. Uwaga! Nieistotne jest, ile razy powtarza się dany element, bo z matematycznego punktu widzenia to ten sam element.
- Zbiory C = {a, b, c, d} i D = {b, a, c, d} są równe, bo każdy element ze zbioru C należy do zbioru D i odwrotnie – każdy element ze zbioru D należy do zbioru C. Uwaga! Dla równości zbiorów nie ma znaczenia kolejność przedstawiania elementów w zbiorze.

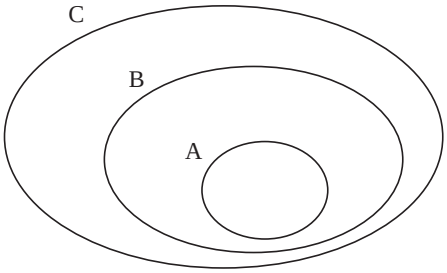
Równość zbiorów ma swoje własności. Mówimy, że każdy zbiór jest równy samemu sobie (A = A). Ponadto jeżeli zbiór A jest równy zbiorowi B, to zbiór B jest równy zbiorowi A ($A = B \Rightarrow B = A$) oraz jeżeli zbiór A jest równy zbiorowi B i zbiór B jest równy z C, to zbiór A jest równy zbiorowi C (symbolicznie możemy to zapisać: $[A = B \wedge B = C] \Rightarrow A = C$).

Wracając do tego, co dotychczas powiedziano o podzbiorach, uporządkujemy naszą wiedzę w formie własności. Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami, dla których zachodzą następujące własności:

(1) $\emptyset \subset A$
(2) $A \subset A$
(3) jeśli $A \subset B \wedge B \subset C$, to $A \subset C$
(4) jeśli $A \subset B \wedge B \subset A$, to $A = B$
(5) jeśli $A \neq B$, to $A \not\subset B \vee B \not\subset A$

Zbiór pusty nie zawiera żadnego elementu, więc jest podzbiorem każdego zbioru (1), o czym już wspominałam. Każdy zbiór jest swoim podzbiorem, bo każdy element podzbioru należy do zbioru (2). Własność (3), nazywana prawem przechodniości dla relacji zawierania (inkluzji) (rys. 10) mówi, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, a z faktu, że zbiór B zawiera się w zbiorze C, wynika, że każdy element z B jest w C. Zatem jeśli każdy element z A jest w B i każdy z B w C, to prawdą jest, że każdy z A jest w C, czyli zbiór A jest podzbiorem zbioru C. Natomiast jeśli dwa rozważane zbiory są swoimi podzbiorami, to muszą być równe (4). I na koniec sytuacja opisana własnością (5), odnosząca się do zbiorów, które nie są równe, a dokładniej – w zbiorze A istnieje element, który nie należy do B lub w B istnieje element, którego nie ma w A.

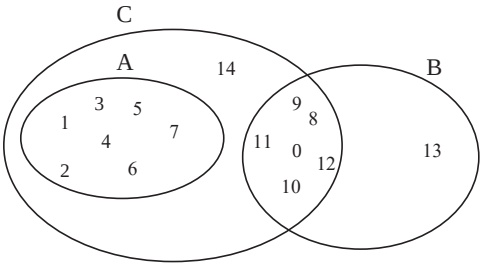
Rysunek 10. Inkluzja trzech zbiorów



Przykłady

× Niech A będzie zbiorem wszystkich czworokątów, B zbiorem równoległoboków, zaś C zbiorem prostokątów. Między zbiorami A, B, C zachodzą następujące inkluzje $C \subset B \wedge B \subset A$. Zatem na mocy własności (3) $C \subset A$.

× Niech dane będą zbiory A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {0, 8, 9, 10, 11, 12, 13} oraz C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14}. Podane zbiory nie zawierają zbyt wielu elementów i określenie inkluzji tych zbiorów nie powinno przysporzyć trudności. Jednak zobaczmy, jak uprości się zadanie, gdy przedstawimy A, B, C w formie graficznej.



Z przedstawionego schematu szybko odczytamy, że $A \subset C$, ponieważ każdy element zbioru A również należy do C, oraz $B \not\subset C$, bo istnieje element, który należy do B i nie ma go w C. Jest to liczba 13.

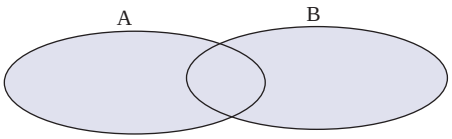
2.2. Działania na zbiorach

Dotychczas rozważaliśmy zbiór i jego elementy. Teraz zajmiemy się budowaniem zbiorów za pomocą innych, znanych nam uprzednio zbiorów. W tym celu określimy działania na zbiorach. Kolejno przedstawimy sumę zbiorów, iloczyn zbiorów i różnicę zbiorów.

O sumie zbiorów

Sumą (złączeniem) zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cup B$, do którego należą elementy zbioru A oraz elementy zbioru B.

Symbolicznie zapisujemy:
$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$



Przykłady

- Niech A będzie zbiorem dziewcząt z klasy IIa SP 15 w Olsztynie, B zbiorem chłopców z tej samej klasy. Złączeniem zbiorów A i B jest zbiór wszystkich uczniów z klasy z IIa SP 15 w Olsztynie.
- Dane są $A = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $B = \{a, b\}$. Sumą zbiorów jest zbiór $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, a, b\}$.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich trójkątów, zaś B zbiorem wszystkich trójkątów równoramiennych. Sumą (złączeniem) zbiorów A i B będzie zbiór wszystkich trójkątów.

Zastanówmy się, kiedy element nie będzie należał do sumy zbiorów. Oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy nie będzie elementem zbioru A i nie będzie elementem zbioru B, co możemy zapisać $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$. W tym wypadku, tak jak to zrobiliśmy przy zbiorze niebędącym podzbiorem danego zbioru, wystarczyło zbudować negację definicji sumy zbiorów. Przyjrzyjmy się teraz własnościom sumy zbiorów, które wynikają z jej definicji.

(1) $A \cup B = B \cup A$
(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(3) $\emptyset \cup A = A$
(4) $A \cup A = A$

W celu uzasadnienia prawdziwości przywołanych własności sumy powinniśmy odnieść się do jej definicji. Dla wykazania własności (1) przyjmijmy element $x \in A \cup B$. Wtedy wprost z definicji sumy otrzymujemy, że $x \in A \vee x \in B$. Korzystając teraz z prawa przemienności alternatywy, możemy twierdzić, że $x \in B \cup A$. Własność (2) uzasadnimy tylko za pomocą definicji. Zauważmy: z faktu $x \in A \cup (B \cup C)$ wynika, że x jest elementem co najmniej jednego ze zbiorów A lub B lub C, zatem na mocy definicji $x \in (A \cup B) \cup C$. Własność (3) jest oczywista. Skoro $x \in \emptyset \cup A$, to musi należeć do A, bo do $\emptyset$ nie należy żaden element. Myślę, że wykazanie prawdziwości (4) mogę pozostawić czytelnikom. Własność (1) sumy zbiorów nazywamy prawem przemienności, natomiast (2) prawem łączności sumy zbiorów (Rasiowa, 2003, s. 13).

O zależnościach między inkluzją a sumą zbiorów

Prześledźmy teraz twierdzenia, które uwzględnią zależności między inkluzją a sumą zbiorów. Niech dane będą zbiory A, B, C, D, dla których:

(1) $A \subset A \cup B$ oraz $B \subset A \cup B$. Podane inkluzje przekonują nas, że suma zbiorów zawiera każdy ze swoich składników.

(2) jeśli $A \subset C \wedge B \subset C$, to $A \cup B \subset C$. Mówi o tym, że jeśli każdy ze składników sumy, tj. zbiór A i B, zawierają się w zbiorze C, to suma tych zbiorów również zawiera się w C.

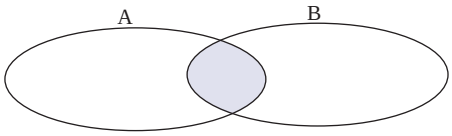
(3) jeśli $A \subset C \wedge B \subset D$, to $A \cup B \subset C \cup D$. Mówi, że skoro składniki sumy, tj. A i B, zawierają się odpowiednio w zbiorach C i D, to suma składników zawiera się sumie zbiorów C i D.

(4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$. Mówi, że suma pewnego zbioru i jego podzbioru zawsze daje nam zbiór będący nadzbiorem tego podzbioru (Rasiowa, 2003, s. 14).

O iloczynie zbiorów

Iloczynem (przekrojem lub częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cap B$, do którego należą elementy znajdujące się jednocześnie w zbiorze A i zbiorze B.

Symbolicznie zapisujemy:
$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$



Przykłady

- Niech A będzie zbiorem wszystkich uczniów z klasy Ia SP 45 w Szczecinie, B zbiorem chłopców z tej samej klasy. Iloczynem zbiorów A i B jest zbiór wszystkich chłopców z klasy Ia SP 45 w Szczecinie.
- Dane są $A = \{1, 2, a\}$ oraz $B = \{2, 3, a\}$. Iloczynem zbiorów jest zbiór $A \cap B = \{2, a\}$.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich trójkątów, a B zbiorem trójkątów równoramiennych. Iloczynem tych zbiorów będzie zbiór zawierający wszystkie trójkąty równoramienne.

Może się zdarzyć, że nie będziemy mogli wskazać ani jednego elementu, który należy zarówno do jednego, jak i drugiego zbioru. Tak jak w przypadku, gdy elementy jednego zbioru będą żółtymi piłkami, a drugiego czerwonymi o wielkości odpowiadającej tym ze zbioru piłek żółtych. Wtedy nie istnieje ani jedna piłka, która byłaby czerwona i żółta jednocześnie. Takie zbiory nazywamy *zbiorami rozłącznymi* i oznaczamy $A \cap B = \emptyset$. Innym przykładem zbiorów rozłącznych będzie zbiór osób zameldowanych w Poznaniu oraz zbiór osób zameldowanych w Szczecinie, ponieważ w naszym kraju każdy może być zameldowany tylko w jednym miejscu. Wynika stąd, że nie znajdziemy nikogo, kto legalnie byłby zameldowany jednocześnie i w Szczecinie, i w Poznaniu.

Zastanówmy się kiedy jeszcze element nie będzie należał do iloczynu zbiorów. Oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy nie będzie elementem zbioru A lub nie będzie elementem zbioru B, co możemy zapisać, negując definicję zbiorów w następujący sposób: $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$. Odwołując się do definicji iloczynu zbiorów, rozważymy następujące własności:

(1) $A \cap B = B \cap A$
(2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(3) $\emptyset \cap A = \emptyset$
(4) $A \cap A = A$

Uzasadniając własności iloczynu zbiorów, również wystarczy odwołać się do definicji. Skoro $x \in A \cap B$, to $x \in A \wedge x \in B$. Koniunkcja zdań jest przemienna, stąd $x \in B \wedge x \in A$. Natomiast z faktu, że $x \in B \wedge x \in A$ na mocy definicji wiemy, że $x \in B \cap A$, co dowodzi własności (1) iloczynu zbiorów. Własność (2) jest również prawdziwa, bo skoro $x \in A \cap (B \cap C)$, to x należy do każdego ze zbiorów A, B, C, zatem $x \in (A \cap B) \cap C$. We własności (3) zbiór pusty nie zawiera żadnego elementu, więc niemożliwe jest, aby $x \in \emptyset \cap A$. Oczywistość własności (4) dla iloczynu zbiorów wynika wprost z definicji iloczynu (Rasiowa, 2003, s. 15).

O zależnościach między inkluzją a iloczynem zbiorów

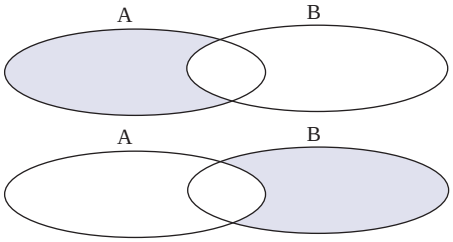
Prześledźmy ponownie twierdzenia, które tym razem uwzględniają zależności między inkluzją a iloczynem zbiorów. Niech dane będą zbiory A, B, C, D, dla których:

(1) $A \cap B \subset A$ oraz $A \cap B \subset B$. Mówi, że iloczyn zbiorów zawiera się w każdym z tych zbiorów.
(2) jeśli $A \subset B \wedge A \subset C$, to $A \subset B \cap C$. Mówi o tym, że jeśli zbiór zawiera w dwóch danych zbiorach, to zawiera się również w iloczynie tych zbiorów.
(3) jeśli $A \subset C \wedge B \subset D$, to $A \cap B \subset C \cap D$. Mówi, że iloczyn dwóch zbiorów będących podzbiorami innych zbiorów zawiera się w iloczynie tych zbiorów.
(4) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$. Mówi, że w wyniku iloczynu zbioru i jego podzbioru zawsze otrzymujemy podzbiór (Rasiowa, 2003, s. 16).

O różnicy zbiorów

Różnicą zbiorów A z B nazywamy zbiór A\B, do którego należą elementy znajdujące się w zbiorze A i które jednocześnie nie należą do B (diagram górny). Analogicznie różnicą zbiorów B z A nazywamy zbiór B\A wszystkich tych elementów, które są w B i nie ma ich w A (diagram dolny).

Symbolicznie zapisujemy:
$A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$
$B \backslash A = \{x: x \in B \wedge x \notin A\}$



Przykłady

- Niech A będzie zbiorem studentów pierwszego roku pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej Uniwersytetu Szczecińskiego, zaś B zbiorem studentów tego samego roku, którzy mają rude włosy. Różnicą zbiorów A\B jest zbiór wszystkich studentów pierwszego roku pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej Uniwersytetu Szczecińskiego w roku akademickim 2021/2022 o włosach w innym kolorze niż rudy.
- Niech $A = \{3, 4, 5\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$. Wtedy $A \backslash B = \{3\}$, a $B \backslash A = \{6\}$.
- Niech A będzie zbiorem wszystkich równoległoboków, B zbiorem wszystkich prostokątów. Zatem A\B będzie zbiorem wszystkich równoległoboków, które nie są prostokątami, a B\A zbiorem pustym.

Omówimy teraz wybrane własności różnicy zbiorów A, B (Semadeni, 1979, s. 105).

(1) $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$
(2) $(A \setminus B) \cup A = A$, $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
(3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \setminus B)$

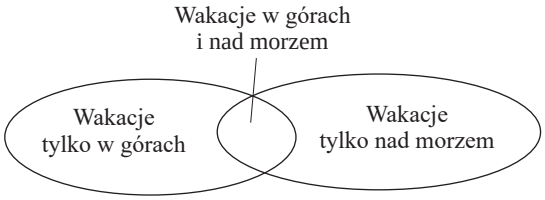
Własność (1) możemy określić mianem oczywistej. Nietrudno dostrzec, że jeśli z pewnego zbioru (u nas A) wykluczymy wszystkie elementy tego zbioru, to otrzymamy zbiór pusty. I dalej, jeśli ze zbioru A nie wykluczymy żadnego elementu, to A pozostanie bez zmian. I wreszcie, gdy będziemy chcieli wykluczyć dowolny element ze zbioru, który tych elementów nie zawiera, to nadal będziemy mieli zbiór pusty. W (2) uzasadnienie możemy przeprowadzić analogicznie na podstawie definicji różnicy. Własność (3) mówi o tym, że jeżeli wybierzemy dowolny element należący do $A \setminus B$, to tak, jak byśmy wybrali element z A nienależący do iloczynu zbiorów A i B. I dalej, wybierając element z obszaru części wspólnej pewnego zbioru i obszaru tego zbioru, który pozostał po zabraniu elementów należących do innego zbioru, znajdziemy się ponownie w obszarze należącym do różnicy rozpatrywanych zbiorów.

Rozważmy teraz zadanie ilustrujące nam, jak możemy wykorzystać dotychczas zgromadzone informacje o działaniach na zbiorach.

Zadanie

Po powrocie z wakacji do szkoły wychowawczyni przeprowadziła lekcję nt. wakacyjnych wspomnień. Uczniowie klasy IIIa chętnie opowiadali o miejscach, które odwiedzili podczas wakacji. Okazało się, że 15 uczniów było podczas wakacji nad morzem, 12 w górach, a 5 było nad morzem i w górach. Ilu uczniów liczy klasa IIIa, ilu uczniów łącznie spędziło wakacje tylko w górach albo tylko nad morzem?

Do rozwiązania zadania posłużymy się schematem, który zdecydowanie ułatwi poszukiwanie właściwych odpowiedzi. Uzupełniając go danymi liczbowym z treści zadania, uzyskujemy następujące odpowiedzi. Skoro nad morzem i w górach było 5 osób z klasy IIIa, to tylko nad morzem było 10 uczniów, zaś tylko w górach 7. Stąd wniosek, że cała klasa liczy 22 uczniów (10 + 7 + 5).



O zależnościach między inkluzją a różnicą zbiorów

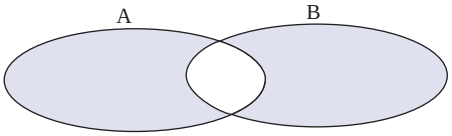
Tak ja poprzednio, warto zwrócić uwagę na twierdzenia opisujące związki między inkluzją a różnicą dowolnych zbiorów A, B, C, D:

(1) $A \backslash B \subset A$
(2) jeśli $A \subset C \wedge B \subset D$, to $A \backslash D \subset C \backslash B$
(3) jeśli $A \subset B$, to $C \backslash B \subset C \backslash A$
(4) $A \subset B \Leftrightarrow A \backslash B = \emptyset$

Zależność (1) wynika bezpośrednio z definicji różnicy oraz z definicji podzbioru. Skoro element należy do A\B, to należy do A i nie ma go w B. Zatem różnica musi zawierać się w A. W (2) z założenia wiemy, że A jest podzbiorem C i B jest podzbiorem D. Zatem jeśli element należy do A\D, to należy do A i nie ma go w D. A skoro nie ma go w D, to nie może należeć do B, bo B jest podzbiorem D. W konsekwencji C\B zawiera tylko elementy z C. Stąd wnioskujemy, że A\D jest podzbiorem zbioru C\B. Zależność (3) wynika z relacji między zbiorami A i B. Skoro A jest podzbiorem zbioru B i od dowolnego zbioru C zabierzemy elementy nadzbioru (czyli zbioru B), to taka różnica jest podzbiorem zbioru C\A. Tożsamość (4) jest oczywista, bo jeśli od elementów podzbioru zabierzemy elementy zbioru, z którego ten podzbiór wyodrębniono, to nie zostanie żaden element. Otrzymujemy zatem zbiór pusty (Rasiowa, 2003, s. 19).

O różnicy symetrycznej zbiorów

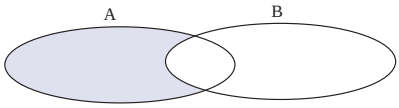
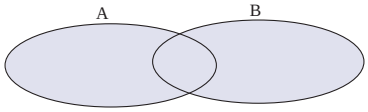
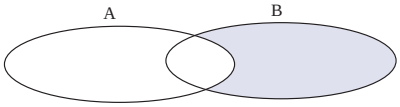
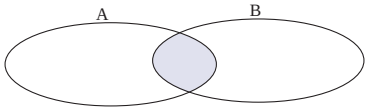
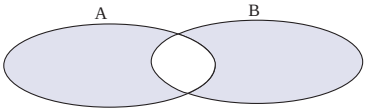
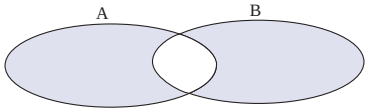
Różnicą symetryczną zbiorów A z B nazywamy zbiór $A \div B$ będący sumą zbiorów $A \backslash B$ oraz $B \backslash A$ i zapisujemy: $A \div B = A \backslash B \cup B \backslash A$



Przyjrzyjmy się, jak graficznie przedstawiono różnicę symetryczną i spróbujmy zapisać ją za pomocą sumy oraz iloczynu zbiorów A i B. Analizując diagram ilustrujący definicję różnicy symetrycznej, dostrzegamy, że możemy ją przedstawić jako różnicę sumy zbiorów A i B oraz iloczynu tych zbiorów, tj. $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Jak wykazać, że takie przedstawienie różnicy symetrycznej jest zgodne z jej definicją? W tym celu wystarczy jedynie pokazać, że równość

$$(*)\ A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

jest prawdziwa. Uzasadnimy równość (*) korzystając z diagramów Venna. Będziemy kolejno rysować składowe naszej równości, tj. sumę zbiorów, przekrój zbiorów i odpowiednie różnice. Jeśli na końcowym rysunku uzyskamy ten sam obszar dla każdej ze stron równości, to wykażemy jej prawdziwość.

Lewa strona równości (*)	Prawa strona równości (*)
$A \setminus B$ 	$A \cup B$ 
$B \setminus A$ 	$A \cap B$ 
$A \setminus B \cup B \setminus A$ 	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ 

Ostatni wiersz diagramów pokazuje, że analizując oddzielnie stronę lewą i prawą naszej równości, uzyskaliśmy ten sam obszar. Ktoś mógłby w tym miejscu zadać pytanie, dlaczego przyjęłam akurat taki układ zbiorów. Odpowiedź jest bardzo prosta. Jest to układ, który pozwala rozmieścić elementy zbiorów w każdym możliwym przypadku, tj. wtedy, gdy zbiory A i B są równe, albo rozłączne, albo jeden jest podzbiorem drugiego. Myślę, że czytelnicy, którzy nie dowierzają, mogą przeprowadzić analogiczne rozumowanie dla innego układu pętli.

Matematyków nie w pełni satysfakcjonują takie uzasadnienia, a tam gdzie mogą ich unikać, wybierają inne rozwiązania. Przeprowadzimy teraz dowód równości (*) w sposób bardziej akceptowalny przez matematyków.

Niech dane będą dowolne zbiory A, B, dla których zachodzi równość:

$$A\backslash B \cup B\backslash A = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

Przyjmijmy, że

$$x \in [(A\backslash B) \cup (B\backslash A)] \overset{1}{\Leftrightarrow} x \in (A\backslash B) \vee x \in (B\backslash A)$$
$$\overset{2}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$
$$\overset{3}{\Leftrightarrow} [x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \wedge [x \notin B \vee (x \in B \wedge x \notin A)]$$
$$\overset{4}{\Leftrightarrow} [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)] \wedge [(x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)]$$
$$\overset{5}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A) \overset{6}{\Leftrightarrow} x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$$
$$\overset{7}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

co należało dowieść.

Oznaczenia wprowadzone w powyższym uzasadnieniu:

1 – z definicji sumy zbiorów,

2 – z definicji różnicy zbiorów,

3 – z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,

4 – z prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji,

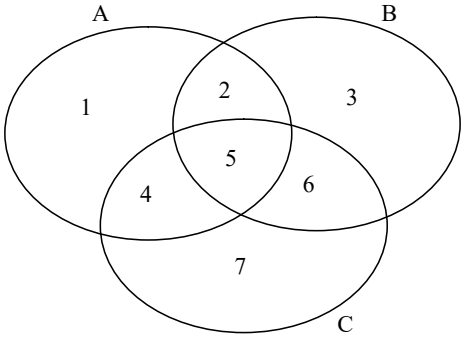
5 – z prawa wyłącznego środka,

6 – z definicji sumy oraz iloczynu,

7 – z definicji różnicy.

Zapis wygląda na skomplikowany, ale w rzeczywistości taki nie jest. Wykorzystuje tylko dotychczas zamieszczone informacje. Dla ułatwienia nad równoważnością zamieściłam wskazówki, do których treści się odwołuję, ale nie ma formalnej konieczności, aby je tam umieszczać.

Gdy za pomocą rysunku uzasadniamy własności dla trzech zbiorów, często wykorzystujemy tzw. *koniczynkę.* Koniczynką nazywamy graficzny układ zbiorów na płaszczyźnie uwzględniający wszystkie możliwe relacje między trzema zbiorami.



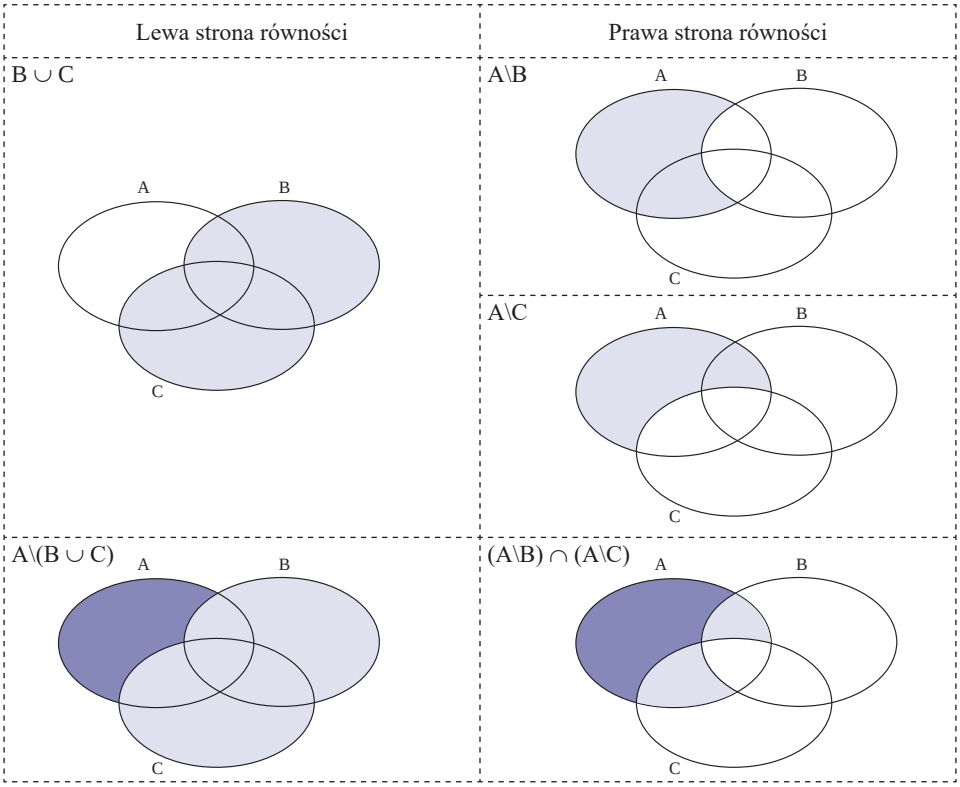
Układ trzech zbiorów, czyli koniczynka, wyznacza siedem obszarów, do których należą:

w 1 – elementy, które należą tylko do zbioru A,
w 2 – elementy, które znajdują się w zbiorach A i B jednocześnie, ale nie należą do zbioru C,
w 3 – elementy, które należą tylko do zbioru B,
w 4 – elementy, które znajdują się w zbiorach A i C jednocześnie, ale nie należą do zbioru B,
w 5 – elementy, które znajdują się w zbiorach A, B i C jednocześnie,
w 6 – elementy, które znajdują się w zbiorze B i C jednocześnie, ale nie należą do zbioru A,
w 7 – elementy, które należą tylko do zbioru C.

Oczywiście to, w jakiej kolejności oznaczymy zbiory, tj. według ruchu wskazówek zegara czy przeciwnie do nich, nie ma znaczenia. Ważne jest, aby wykazując przy pomocy rysunku prawdziwość równości, jej lewą i prawą stronę opisać takim samym układem pętli, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład

- Dla dowolnych zbiorów A, B, C przeprowadźmy uzasadnienie równości $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, wykorzystując do tego koniczynkę.



W lewej i prawej kolumnie część zaznaczona ciemniejszym kolorem wskazuje obszar, w którym znajdują się elementy opisane rozpatrywaną równością. Jest on taki sam, stąd wniosek, że nasza równość jest prawdziwa dla dowolnych zbiorów A, B, C.

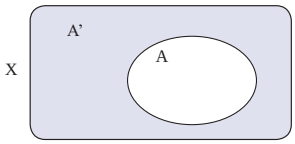
Przeprowadzone powyżej graficzne uzasadnienia zostały przedstawione etapami. Każdą z wykonanych operacji zilustrowałam oddzielnym rysunkiem. Taki zabieg miał ułatwić czytelnikowi zrozumienie. Jednak w rzeczywistości nie musimy rysować kolejnych etapów, wystarczy narysować etap końcowy i na nim zaznaczać kolejno rozważane obszary. Pomocne w takiej sytuacji mogą okazać się kolory lub kierunki zakreślania obszarów, które konsekwentnie wykorzystywane dla prawej i lewej strony równości pozwolą uzyskać poszukiwane rozwiązanie.

Przejdźmy teraz do sytuacji, w której nasz zbiór umieszczono w pewnej przestrzeni. Oczywiście przestrzeń jest również zbiorem (zresztą z taką sytuacją spotkaliśmy się wtedy, gdy rozważaliśmy podzbiory danego zbioru). Rozważmy zatem zbiór A zawierający wszystkie trójkąty oraz zbiór X, do którego należą wszystkie płaskie figury geometryczne. Nietrudno dostrzec, że wśród wszystkich elementów zbioru X znajdują się figury geometryczne, które albo są trójkątami, albo nimi nie są. Zgodnie z tym, co zostało powiedziane dotychczas, nasz zbiór A rzeczywiście jest podzbiorem zbioru X. Taki ustalony zbiór X, w którym rozważamy inne zbiory, nazywamy *przestrzenią zbioru*.

O dopełnieniu zbioru

Niech X będzie przestrzenią, w której rozpatrujemy zbiór A. Dopełnieniem zbioru A zawierającego się w przestrzeni X nazywamy zbiór wszystkich elementów znajdujących się w X i nienależących do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy A'. Przestrzeń, w której rozpatrujemy dany zbiór, nazywamy również zbiorem *uniwersalnym* lub *uniwersum*.

Symbolicznie zapisujemy:
$A' = X \setminus A = \{x: x \in X \wedge x \notin A\}$



Przykłady

- Dopełnieniem zbioru uczniów klasy Ia rozpatrywanym w SP 14 w Lublinie są uczniowie uczęszczający do innych klas niż wspomniana Ia w tej szkole.
- Niech X będzie zbiorem wszystkich cyfr w dziesiątkowym systemie pozycyjnym, natomiast A zbiorem cyfr opisującym liczby mniejsze od 5. Dopełnieniem zbioru A' w przestrzeni X jest zbiór A' = {5, 6, 7, 8, 9}.

Własności dopełnienia zbiorów A, B przestrzeni X:

(1) $X \cap A = A$
(2) $X \cup A = X$
(3) $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$
(4) $(A')' = A$
(5) $(A \subset B) \Leftrightarrow B' \subset A'$

Związki między dowolnym zbiorem A i jego dopełnieniem w przestrzeni X:

(1) $A \cup A' = X$
(2) $A \cap A' = \emptyset$
(3) $(A \cup A')' = \emptyset$
(4) $(A \cap A')' = X$

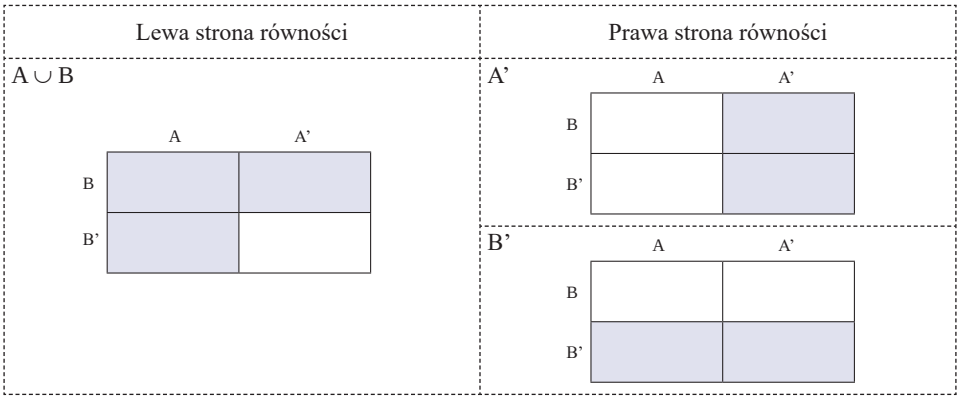
Własności dopełnienia zbiorów A, B przestrzeni X oraz związki między dowolnym zbiorem i jego dopełnieniem w X pozostawiam do sprawdzenia czytelnikom. Proponuję wykorzystać diagramy Venna.

Do ilustracji działań na zbiorach oprócz diagramów Venna używamy również diagramów okienkowych (zwanych kartezjańskimi lub Carrolla[5]). Wykażemy za ich pomocą prawdziwość praw de Morgana dla dopełnienia zbiorów, czyli:

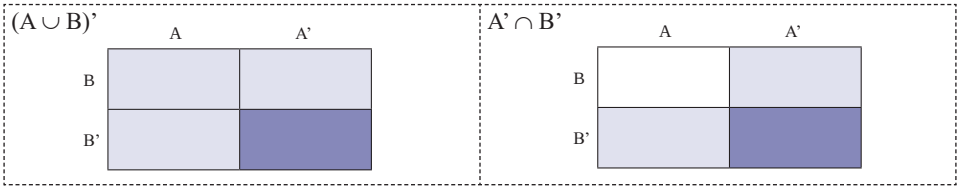
(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

W celu uzasadnienia, że równości (1) i (2) są prawdziwe, postępujemy tak, jak w przypadku diagramów Venna, czyli każdą stronę równości zaznaczamy na oddzielnym diagramie. Ciemny obszar w ostatnich wierszach kolumn wyznacza obszar równy całej stronie równości (lewej albo prawej). Pamiętajmy, tu tak samo jak w przypadku diagramów Venna wyszczególniłam kolejne etapy. Oczywiście posługując się diagramami Carrolla, możemy ograniczyć się do zaznaczenia właściwego obszaru, przechodząc do ostatniego etapu.

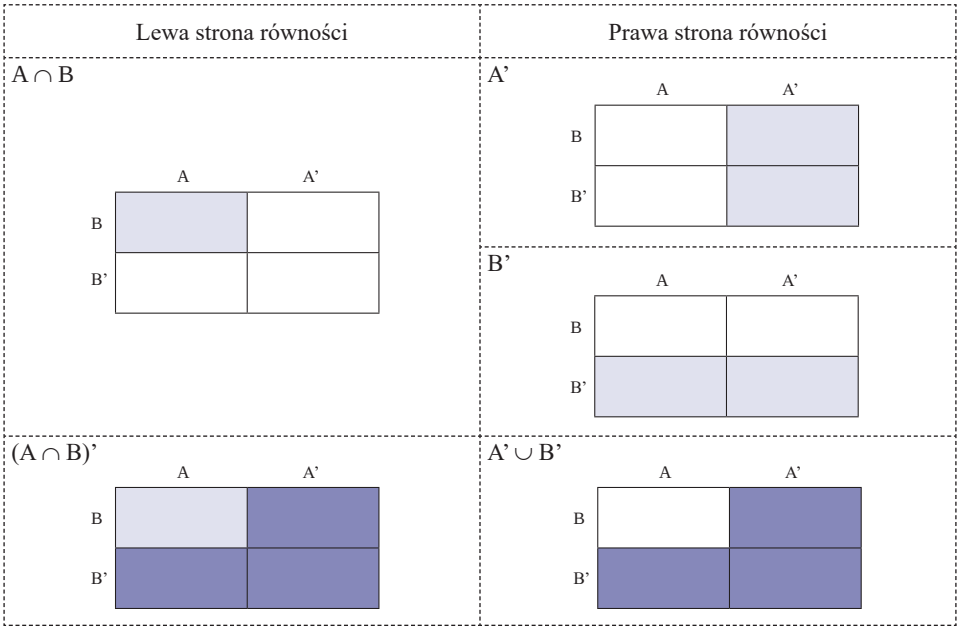
Dla $(A \cup B)' = A' \cap B'$ diagramy Carrolla prezentują się następująco:



[5] Charles Lutwidge Dodgson (pseudonim Lewis Carroll) (1832–1898) – angielski pisarz, poeta i matematyk. Jego najsłynniejsze dzieła to *Alicja w krainie czarów* oraz *Po drugiej stronie lustra.*



Dla (A ∩ B)' = A' ∪ B' otrzymujemy:



2.3. Szkolne przykłady nieskończonych zbiorów liczbowych

Zbiory liczbowe mogą być skończone albo nieskończone. Wszystko zależy od tego, w jaki sposób opiszemy kryteria przynależności elementów do zbioru. I tak przykładami zbiorów skończonych będą zbiór liczb jednocyfrowych większych od 3, czyli {4, 5, 6, 7, 8, 9} czy zbiór dzielników liczby 24, a więc {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}. Jednak rozważanie takich zbiorów może okazać się mało interesujące. Oczywiście nie twierdzę, że istnienie zbiorów o skończonej liczbie elementów jest bezzasadne. Powinniśmy doceniać ich możliwości dydaktyczne, chociażby

w zakresie ilustrowania wybranych praw i własności. Jednak to nieskończone zbiory liczbowe przykuwają największą uwagę matematyków.

Nieskończone zbiory liczbowe przewijają się przez wszystkie lata nauki szkolnej. We wczesnej edukacji pojawiają się liczby naturalne, a na drugim etapie edukacyjnym liczby całkowite, wymierne, niewymierne i rzeczywiste. Nie są to oczywiście jedyne nieskończone zbiory liczbowe, którymi interesują się matematycy, nam jednak one wystarczą. Zanim jednak przystąpimy do omówienia liczb naturalnych, przypomnimy sobie, jak definiowano zbiory liczbowe w szkole.

Zbiór liczb naturalnych oznaczamy $\mathbb{N}$. Do tego zbioru należą liczby {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}. Pojawia się tu pierwsza sporna kwestia, która dotyczy przynależności zera do zbioru. Niektórzy matematycy zakładają, że 0 jest liczbą naturalną, a inni nie. Skąd się bierze ta rozbieżność, skoro w matematyce wszystko ma być proste i jednoznaczne? Tak naprawdę wszystko zależy od założeń początkowych danej teorii matematycznej. Czasami zero zwyczajnie komplikuje prezentację treści z danego zakresu, dlatego wyklucza się je ze zbioru liczb naturalnych. My przyjmujemy zbiór liczb naturalnych włącznie z 0. Kolejnym zbiorem jest zbiór liczb całkowitych. Oznaczamy go przez $\mathbb{C}$[6]. Należą do niego wszystkie liczby naturalne i liczby do nich przeciwne, czyli {…, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …}. Uwaga! Zero nie ma liczby przeciwnej. Kolejnym zbiorem jest zbiór liczb wymiernych, którego podzbiorem jest zbiór liczb całkowitych, a zatem również naturalnych. W swoim obrębie zawiera wartości liczbowe, które opisują nie tylko całości, ale również części pewnych wielkości. Oznaczamy go przez $\mathbb{W}$ i definiujemy:

O liczbach wymiernych

Liczby wymierne $\mathbb{W}$[7] to liczby, które możemy zapisać za pomocą ułamka zwykłego, czyli

$$\mathbb{W} = \{\tfrac{a}{b} : a, b \in C \wedge b \neq 0\}$$

---

[6] W literaturze matematycznej zbiór liczb całkowitych oznacza się przez $\mathbb{Z}$, zaś $\mathbb{C}$ jest zarezerwowane dla zbioru liczb zespolonych, mimo to postanowiłam zachować oznaczanie najczęściej pojawiające się w podręcznikach szkolnych.

[7] W literaturze matematycznej zbiór liczb wymiernych oznacza się przez $\mathbb{Q}$. Jednak – tak jak w przypadku liczb całkowitych – postanowiłam zachować oznaczanie najczęściej pojawiające się w podręcznikach szkolnych.

Oczywiście jeśli liczbę możemy przedstawić za pomocą ułamka zwykłego, to z pewnością da się ją zapisać za pomocą ułamka dziesiętnego skończonego lub ułamka dziesiętnego nieskończonego okresowego.

Ze zbioru liczb wymiernych poprzez negację definicji uzyskujemy zbiór liczb niewymiernych.

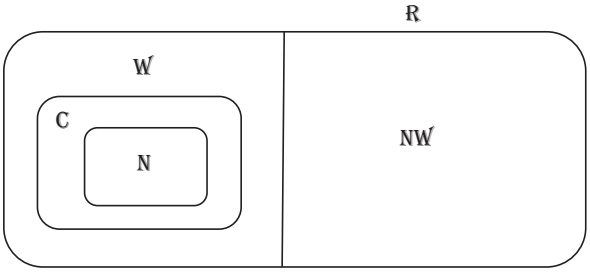
O liczbach niewymiernych

Liczby niewymierne NW[8] to liczby, których nie możemy zapisać za pomocą ułamka zwykłego.

Skoro nie możemy przedstawić liczby niewymiernej za pomocą ułamka zwykłego, to również nie możemy jej zapisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego i ułamka dziesiętnego nieskończonego okresowego. Znanym przykładem liczby niewymiernej jest słynna *Ludolfina*, czyli liczba π. Każdy z nas się z nią spotkał na lekcjach geometrii, licząc pola i obwody kół. Co więcej, została ona wyróżniona poprzez ogłoszenie 14 marca dniem *Święta Liczby* π.

Ostatnim zbiorem liczbowym poznanym w szkole jest zbiór liczb rzeczywistych R. Zdefiniowano go jako zbiór wszystkich dotychczas poznanych liczb lub jako sumę dwóch rozłącznych zbiorów liczbowych, czyli liczb wymiernych i liczb niewymiernych. Wynika z tego, że przystępując do matury, czytelnik mógł powiedzieć, że każda liczba, z którą się spotkał, na pewno była liczbą rzeczywistą.

Rysunek 11. Interpretacja graficzna zbiorów liczbowych



[8] W literaturze matematycznej zbiór liczb naturalnych oznacza się przez IQ.

Zwróćmy uwagę, że na powyższym schemacie (rys. 11) nie znajdziemy obszaru w $\mathbb{R}$ takiego, w którym moglibyśmy wskazać choć jedną liczbę jednocześnie należącą do zbioru liczb wymiernych oraz niewymiernych. Zaprezentowana interpretacja graficzna ułatwia rozstrzyganie prawdziwości zdań opisujących relacje między tymi zbiorami.

Przykłady

- Każda liczba naturalna jest liczbą wymierną – PRAWDA, bo zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb wymiernych.
- Każda liczba całkowita jest liczbą naturalną – FAŁSZ, bo –5 jest liczbą całkowitą, a nie należy do zbioru liczb naturalnych.
- Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą – FAŁSZ, bo dowolny ułamek niewłaściwy jest liczbą wymierną, a nie jest liczbą całkowitą.
- Każda liczba niewymierna jest liczbą rzeczywistą – PRAWDA, bo zbiór liczb rzeczywistych dzieli się na dwa rozłączne zbiory, z czego jeden z nich to właśnie zbiór liczb niewymiernych.
- $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{R}_+$ to zbiór liczb rzeczywistych dodatnich i analogiczne $\mathbb{R}_-$ zbiór liczb rzeczywistych ujemnych – FAŁSZ, bo 0 jest również liczbą rzeczywistą.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{W}$ – PRAWDA, bo każdą liczbę naturalną możemy przedstawić za pomocą ułamka zwykłego, np. $5 = \frac{10}{2}$.
- Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych w sumie tworzą zbiór liczb rzeczywistych – PRAWDA, bo każda liczba rzeczywista jest wymierna albo niewymierna.

Czytelnik na pewno zwrócił uwagę, że we wszystkich powyższych zdaniach łatwiej jest pokazać, że dana własność nie zachodzi. Przypominam, że wynika to z fantastycznego narzędzia, o którym wspominałam w rozdziale pierwszym, czyli kontrprzykładu. Myślę, że warto tę umiejętność kształtować już we wczesnej edukacji i uświadamiać uczniom, że w matematyce nie ma odpowiedzi TAK lub NIE bez uzasadnienia.

Przykład

- Spróbujmy teraz przybliżyć i utrwalić rozpoznawanie liczb i przypisywanie ich do właściwego zbioru liczbowego. Niech dany będzie zbiór A.

$$A = \left\{ -33\frac{1}{3};\ -18{,}1794732\ldots;\ -\sqrt{5}-11;\ -\sqrt{16};\ -0{,}(3);\ 1\frac{1}{2};\ \pi;\ 9;\ \frac{169}{13};\ 2022\sqrt{2} \right\}$$

Elementami tego zbioru są następujące:

– liczby naturalne: $9;\ \frac{169}{13}$;
– liczby całkowite: $-\sqrt{16};\ 9;\ \frac{169}{13}$;
– liczby wymierne: $-33\frac{1}{3};\ -\sqrt{16};\ -0{,}(3);\ 1\frac{1}{2};\ 9;\ \frac{169}{13}$;
– liczby niewymierne: $-18{,}1794732;\ -\sqrt{5}-11;\ \pi;\ 2022\sqrt{2}$;
– liczby rzeczywiste: wszystkie liczby zbioru A.

Zgodnie z tym, co dotychczas powiedzieliśmy o zbiorach liczbowych, liczbę $\frac{169}{13}$ przedstawioną w postaci ułamka zaliczyłam zarówno do zbioru liczb naturalnych, jak i całkowitych. A wszystko dlatego, że jest on równy liczbie 13, a przy takiej postaci tej liczby już pewnie nikt nie ma wątpliwości. Dlatego warto pamiętać, że rozstrzygając przynależność liczby do zbioru liczbowego, dążymy do przedstawienia jej w najprostszej postaci.

2.4. Zbiory we wczesnej edukacji

Sposób, w który dotychczas omawialiśmy elementy teorii zbiorów, nie jest dobrym rozwiązaniem dla uczniów szkół podstawowych, szczególnie na początku nauki. Uniemożliwia nam to m.in. poziom rozwoju intelektualnego małych uczniów czy znajomość formalnej notacji matematycznej. Jednak zbiory zostały uwzględnione w edukacji wczesnoszkolnej, o czym możemy się przekonać, czytając podstawę programową kształcenia ogólnego dla pierwszego etapu edukacyjnego[9]. Aby

[9] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla

wypełnić to zobowiązanie, musimy dostosować metody nauczania i właściwie dobrać odpowiednie pomoce dydaktyczne. Z. Semadeni przekonuje nas, „należy zawsze pamiętać, że dziecko poznaje pojęcia matematyczne przez odpowiednio ukierunkowane działanie" (Semadeni, 1979, s. 106), dlatego adekwatna do możliwości poznawczych uczniów organizacja zajęć, wsparta właściwymi pomocami dydaktycznymi, powinna umożliwić realizację zadań zapisanych w podstawie programowej.

Realizując treści programowe w klasach I–III obejmujące zbiory, nie ma konieczności wykorzystywania samego pojęcia „zbiór". Symboliczna pętla gromadząca obiekty według wskazanej cechy jest wystarczającym reprezentantem zbioru na tym etapie szkolnym. Uczniowie muszą wiedzieć, że jeżeli element znajduje się w pętli, to należy do zbioru. Jeśli jest poza nią, to do tego zbioru nie należy. Ważne jest, aby podczas pracy z uczniami zwracać uwagę na:

- wyodrębnianie zbioru poprzez wskazywanie lub wymienianie wszystkich elementów (np. na stole leży pętla i różne przedmioty, w pętli umieszczamy te spełniające podane przez nauczyciela warunki),
- wymienianie wszystkich elementów zbudowanego zbioru,
- wyodrębnianie spośród wszystkich elementów tych, które mają określoną cechę lub spełniają określony warunek,
- określanie wspólnej cechy, gdy dany jest zbiór przedmiotów (Semadeni, 1979, s. 95).

Jednak we wczesnej edukacji nie koncentrujemy na budowaniu zbiorów skończonych dla samego ich zaistnienia. Ważnym aspektem podejmowanych działań dydaktycznych jest doskonalenie umiejętności klasyfikowania obiektów. Umiejętność ta stanowi podstawę kształtowania pojęć, w tym również matematycznych. To poprzez wskazywanie, wyodrębnianie, eliminowanie czy porównywanie obiektów dzieci budują pierwsze zbiory. Zbiory, które w swoim obrębie skupiają obiekty wyróżniające się dostrzeżoną przez nich wspólną cechę. Następnie, opisując i uzasadniając przynależność obiektów do zbioru, formułują pierwsze definicje. Definicje te nie spełniają formalnych wymogów matematycznych, ale są nieodzownym etapem kształtowania pojęć matematycznych.

---

szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. z 2017 r., poz. 356).

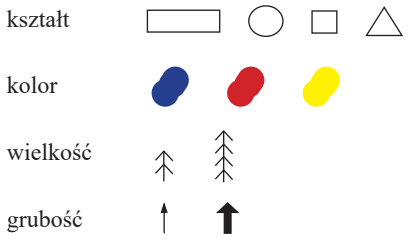
Klocki logiczne Dienesa

Bardzo wartościową pomocą dydaktyczną są klocki Dienesa[10], które możemy wykorzystać nie tylko do kształtowania umiejętności klasyfikacji. Świetnie spisują się na lekcji geometrii przy omawianiu własności figur, podczas budowania układów osiowosymetrycznych czy do budowania i kontynuowania z klocków ciągów obiektów o wyznaczonym rytmie.

Klocki Dienesa to zestaw plastikowych figur geometrycznych w czterech kształtach (kwadrat, prostokąt, trójkąt i koło), trzech kolorach (żółty, niebieski, czerwony), dwóch wielkościach (duże, małe) i dwóch grubościach (cienkie, grube), łącznie 48 figur. Zestaw ten rozbudowano i obecnie możemy go zakupić w wersji powiększonej o sześciokąty. Ta zmiana w żaden sposób nie wpływa na wartość dydaktyczną klocków, powoduje jedynie wzrost liczby klocków w zestawie.

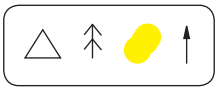
Klocki Dienesa możemy wprowadzić już w przedszkolu, kiedy to w formie zabawy dzieci uczą się rozpoznawać i nazywać kształty, kolory czy oceniać wielkość. Możemy również stawiać przedszkolakom wyzwania, prosząc, aby porządkowały klocki według jednej czy dwóch cech. Wartościową propozycją zadań matematycznych odwołujących się do klocków Dienesa są *Matematyczne malowanki rozwijające zdolności uczniów. Klasa 0 i klasa 1* (Moroz, Wojnowska, 1993). Wszystkim, którzy dotychczas nie zetknęli się z tą propozycją, szczerze ją polecam. Ponadto do zabaw dydaktycznych związanych z klockami Dienesa proponuje się wprowadzanie tzw. kodów. Każdy z klocków możemy opisać (zakodować) według przyjętych oznaczeń, np.

- za pomocą liter i kształtów, np. $\Delta \dot{z}\, m\, c$ to *żółty, mały, cienki trójkąt* lub $\square n\, d\, g$ to *niebieski, duży, gruby kwadrat*,
- za pomocą wybranych kodów obrazkowych, tj.



[10] Zoltan Paul Dienes (1916–2014) był matematykiem, którego zainteresowania obejmowały także teorie nauczania matematyki.

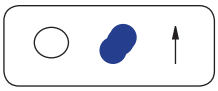
Na specjalnie przygotowanych kartach możemy umieszczać kody, czyli informacje opisujące wybrane klocki. Poniższy kod oznacza klocek, który ma kształt trójkąta, jest mały, żółty i cienki.



Nie jest to jedyna możliwość. Możemy za pomocą kodów wskazywać np. grupę elementów składającą się z sześciu klocków. Nasze utworzone kody mogą zawierać trzy, dwie lub jedną informację. Wtedy będą opisywały nie wybrany element zestawu klocków, ale pewien zbiór.

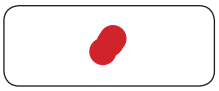
Przykłady kodów

KOD 1



KOD 2

KOD 3



Podane powyżej kody z zestawu klocków Dienesa wyróżniają:

KOD 1 – klocki, które są okrągłe, niebieskie i cienkie – łącznie 2 elementy zestawu,

KOD 2 – wszystkie małe i grube klocki – łącznie 12 elementów zestawu,

KOD 3 – czerwone klocki – łącznie 16 elementów zestawu.

Nietrudno dostrzec, że wspomniane kody bardzo ułatwią organizację zajęć, na których uczniowie będą budowali podzbiory, kierując się wskazanymi cechami. Wspomniane kody możemy wykorzystać do odkrycia ciekawej własności zbioru i jego podzbiorów. Właśnie zabawa w budowanie zbiorów zgodnie z zakodowaną informacją ułatwi uczniom dostrzeżenie, że czym większą liczbę podzbiorów rozłącznych zbudujemy, tym mniejszą liczbę elementów zawiera każdy z nich.

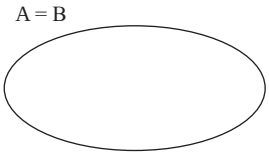
Przykład

W wyniku podziału zbioru klocków Dienesa na podzbiory według pojedynczej cechy uzyskamy następujące podzbiory:

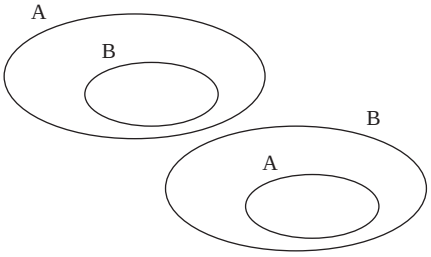
- ze względu na wielkość – zbiór małych i dużych figur, każdy składający się z 24 elementów, do którego należą koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty w trzech kolorach oraz dwóch grubościach,
- ze względu na grubość – zbiór grubych i cienkich figur, każdy składający się z 24 elementów, do którego należą koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty w trzech kolorach oraz dwóch wielkościach,
- ze względu na kolor – zbiór klocków niebieskich, czerwonych i żółtych, każdy składający się z 16 elementów, do którego należą małe i duże, cienkie i grube koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty,
- ze względu na kształt – zbiór trójkątów, kwadratów, prostokątów i kół, każdy składający się z 12 elementów, do którego należą figury grube i cienkie, duże i małe występujące w trzech kolorach.

Kolejnym ciekawym ćwiczeniem z wykorzystaniem klocków Dienesa jest układ zbiorów mających wspólne elementy. Niech dany będzie 24-elementowy zestaw cienkich klocków Dienesa. Rozważmy dwa zbiory A i B. Elementami zbioru A będą wszystkie trójkąty z zestawu, natomiast zbioru B wszystkie żółte klocki. Aby móc wypełnić dwie pętle symbolizujące nasze zbiory, musimy zastanowić się, jak rozłożyć je na płaszczyźnie. Wprowadzenie w ćwiczeniu jedynego właściwego układu pętli dla tego przypadku uczyniłoby ćwiczenie mniej wartościowym dydaktycznie, dlatego warto nie narzucać uczniom ułożenia pętli, a dać im szansę na znalezienie właściwego rozwiązania. Rozważmy następujące ułożenia pętli.

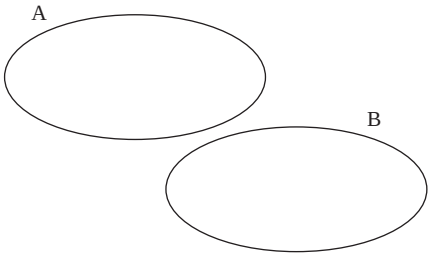
Ułożenie 1,
gdy zbiory A i B są równe



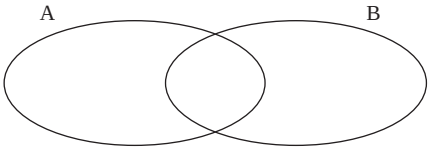
Ułożenie 2,
gdy zbiór A jest podzbiorem zbioru B
i odwrotnie



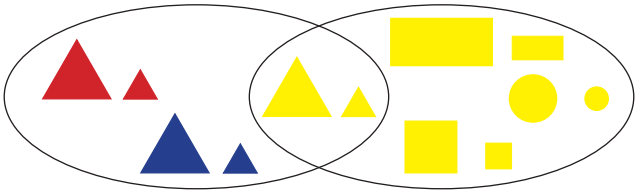
Ułożenie 3,
gdy zbiory A i B są rozłączne



Ułożenie 4,
gdy zbiory A i B nie są rozłączne

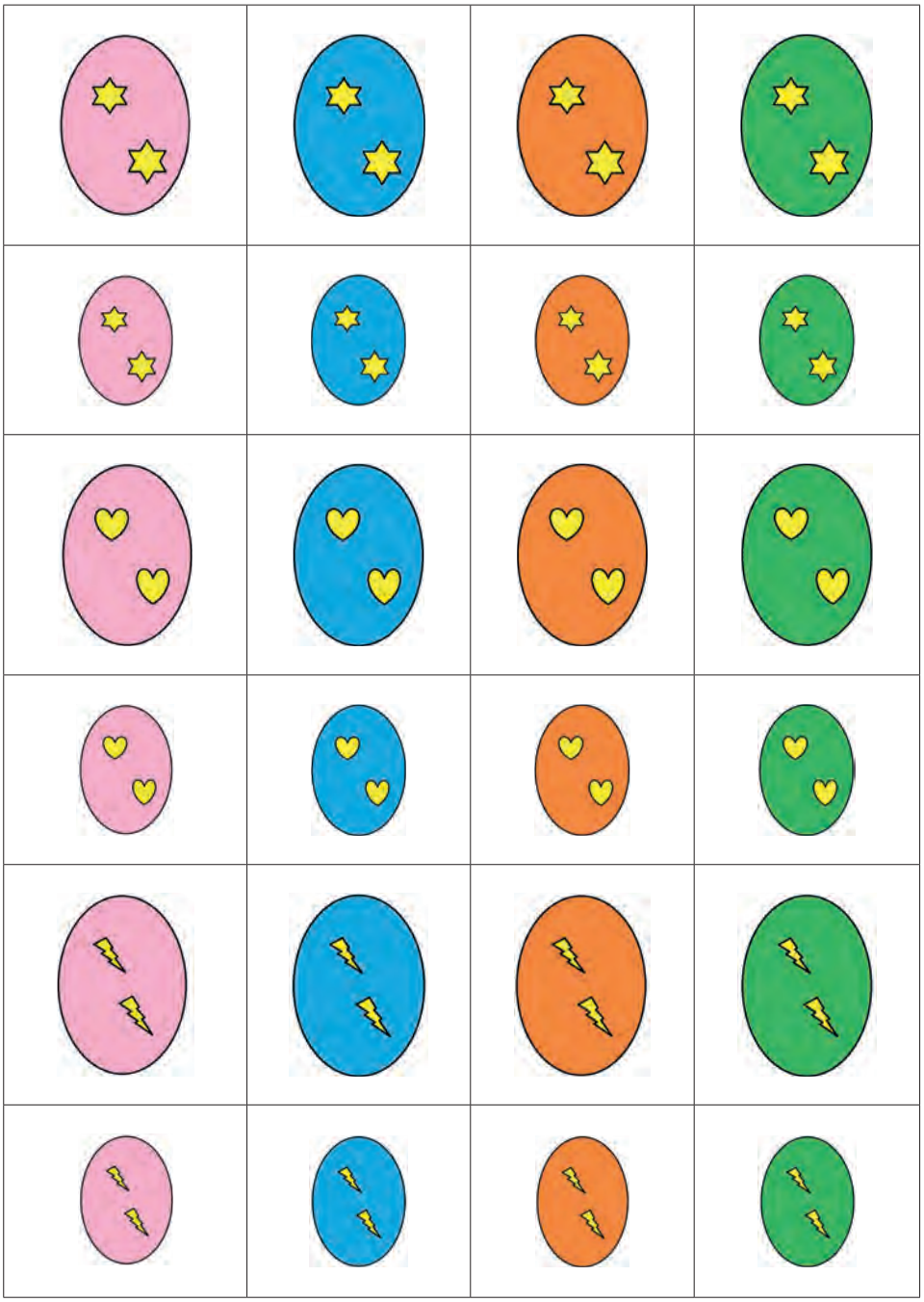


Dla naszego przykładu ułożenie 1 wykluczamy, ponieważ zbiory A i B zawierają inne elementy, a to ułożenie oznacza równość zbiorów. Ułożenie 2 wskazuje, że B jest podzbiorem zbioru A lub odwrotnie. To również uniemożliwia wykonanie zadania, ponieważ żółty kwadrat jest elementem zbioru B, a nie ma go w A. W ułożeniu 3 mamy kłopot z rozmieszczeniem żółtych trójkątów, bo należą one jednocześnie do A i B. Stąd wynika, że pętle symbolizujące zbiory A i B powinny się „zazębiać" tak, jak przy ułożeniu 4. Poprawne rozmieszczenie elementów tych zbiorów przedstawia się następująco:



Zestaw klocków logicznych Dienesa jest bardzo wartościową pomocą dydaktyczną ułatwiającą pracę nad rozwojem umiejętności klasyfikowania, jednak nie jedyną. Taką pomoc możemy stworzyć samodzielnie, budując tzw. karty logiczne. *Karty logiczne* to talia kart, na której umieszczamy rysunki w taki sposób, aby każdy z nich był opisany jedną z wybranych cech. W tym celu należy zdecydować, które cechy uwzględnimy. Przyjmijmy, że bohaterami naszego zestawu logicznego będą pisanki wielkanocne. Pisanki będą w czterech kolorach, a na każdej z nich będzie jeden z trzech możliwych wzorów. Taki zestaw będzie zawierał tylko 12 kart. Wprowadzenie kolejnej cechy, np. wielkości pisanki (duża, mała), zwiększy ich liczbę dwukrotnie, dając zestaw 24 kart. Wybierając dowolny zestaw cech, możemy zbudować autorskie karty, których liczba będzie zależała od naszego wcześniejszego wyboru cech.

Rysunek 12. Zestaw kart logicznych „Wielkanocne pisanki”



2.5. Zadania – zbiory

Zadanie 2.1

Czy poniżej właściwie określono zbiory? Odpowiedź uzasadnij.

a) zbiór ziarenek piasku na plaży w Mielnie,
b) zbiór kredek w piórniku Kasi Kowalskiej z klasy 3a, uczennicy SP 24 w Szczecinie[11],
c) zbiór mieszkańców Opola,
d) zbiór miast,
e) zbiór dobrych uczniów,
f) zbiór książek w Bibliotece Głównej Uniwersytetu Śląskiego.

Zadanie 2.2

Sformułuj warunek, na podstawie którego zbudowano poniższe zbiory.

a) A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
b) B = {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90}
c) C = {♥, ♠, ♣, ♦}
d) D = {a, ą, e, ę, i o, u, y}

Zadanie 2.3

Wymień elementy następujących zbiorów:

a) Ø
b) {Ø}
c) {2, 3, 4}
d) {2, {3}}
e) {0, Ø, {Ø}}
f) zbiór liczb jednocyfrowych w dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

---

[11] Wybrana uczennica jest osobą fikcyjną.

Zadanie 2.4

Umieść dane zbiory liczbowe w dwóch pętlach tak, aby elementy wspólne tych zbiorów nie powtarzały się.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$
b) $M = \{1, 2, 2, 3, 3\}$, $N = \{1, 2, 3\}$
c) K – zbiór dzielników pierwszych liczby 12, L – zbiór dzielników pierwszych liczby 10
d) P – zbiór prostokątów, T – zbiór trapezów.

Zadanie 2.5

Niech dany będzie zbiór $K = \{x \in N: 0 < x \leq 30\}$. Wypisz elementy zbioru spełniające warunki:

a) liczby nie mniejsze od 25,
b) liczby nie większe od 5,
c) liczby, które dadzą się zapisać za pomocą iloczynu liczby 5 i dowolnej liczby naturalnej,
d) liczby dwucyfrowe mniejsze lub równe 24,
e) liczby trzycyfrowe.

Zadanie 2.6

Dane są zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 1, 3\}$, $C = \{0, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Które z tych zbiorów są równe? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.7

Niech dany będzie zestaw klocków Dienesa. Podaj trzy warunki wyznaczające podzbiory tego zbioru oraz sformułuj taki warunek, który wyznacza zbiór pusty.

Zadanie 2.8

Niech X będzie zbiorem klocków Dienesa, A zbiorem klocków czerwonych tego zestawu, zaś B zbiorem wszystkich małych klocków tego zestawu. Za pomocą pętli zaznacz relację między tymi zbiorami.

Zadanie 2.9

Ile podzbiorów ma zbiór składający się z trójkąta, koła i prostokąta? Wypisz wszystkie podzbiory.

Zadanie 2.10

Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $\{-1, \{-1\}, \{-1, 1\}\}$.

Zadanie 2.11

Ile jest podzbiorów zbioru $K = \{2, 4, 6, 8\}$? Wypisz wszystkie podzbiory tego zbioru. Wskaż podzbiory właściwe.

Zadanie 2.12

Dane są zbiory:

A – zbiór wszystkich trójkątów,
B – zbiór wszystkich trójkątów równobocznych,
C – zbiór wszystkich wielokątów,
D – zbiór wszystkich trójkątów prostokątnych.

Wskaż dla zbiorów A, B, C i D, które z poniższych relacji zawierania są prawdziwe.

$A \subset A$	$B \subset A$	$C \subset A$	$D \subset A$
$A \subset B$	$B \subset B$	$C \subset B$	$D \subset B$
$A \subset C$	$B \subset C$	$C \subset C$	$D \subset C$
$A \subset D$	$B \subset D$	$C \subset D$	$D \subset D$

Zadanie 2.13

Uzupełnij zapis wstawiając jeden ze znaków: $\subset$, $\in$, $=$.

a) $\{a, b, c\}$ … $\{a, b, c, d\}$
b) a … $\{a, b, c\}$
c) $\{a, b, c\}$ … $\{a, c, b\}$
d) $\{a\}$ … $\{a, b, c\}$

Zadanie 2.14

Które z następujących zdań są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $7 \in \{\{3, 7\}, \{6, 8\}\}$
b) $\emptyset \subset A$
c) $-1 \in \{-1, 1\}$
d) $-1 \subset \{-1, 1\}$
e) $\{-1\} \subset \{-1, 1\}$
f) $\{3, 4\} \in \{\{1\}, \{3,4\}, 3, \{4\}\}$
g) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
h) $\emptyset \subset \{\{\emptyset\}\}$

Zadanie 2.15

W międzynarodowej konferencji naukowej bierze udział 75 uczestników z Polski. Spośród nich 35 zna język angielski, 20 zna język rosyjski, 26 francuski, 15 angielski i francuski, 17 angielski i rosyjski, 10 rosyjski i francuski, zaś 7 zna wszystkie trzy języki. Ilu, spośród wymienionych, uczestników konferencji nie zna żadnego języka obcego?

Zadanie 2.16

Dane są dwa zbiory: $A = \{-1\}$ oraz $B = \{\{-1\}, \{-1, 1\}\}$. Określ relację między tymi zbiorami.

a) zbiór A zawiera się w zbiorze B,
b) zbiór A należy do zbioru B,
c) zbiór B zawiera się w zbiorze A,
d) zbiór B należy do zbioru A.

Zadanie 2.17

Oceń poniższe relacje między zbiorami liczbowymi. Która z nich została źle określona? Odpowiedź uzasadnij.

a) zbiór liczb naturalnych zawiera się w zbiorze liczb całkowitych,
b) zbiór liczb rzeczywistych ujemnych zawiera się w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich,
c) zbiór liczb wymiernych zawiera się w zbiorze liczb rzeczywistych,
d) zbiór liczb niewymiernych zawiera się w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 2.18

Dane są zbiory: A – zbiór równoległoboków, B – zbiór czworokątów, C – zbiór wielokątów. Jakie figury należą do:

a) sumy zbiorów A i B,
b) sumy zbiorów A, B i C,
c) przekroju zbiorów A, B i C,
d) przekroju sumy zbiorów A i B oraz zbioru C.

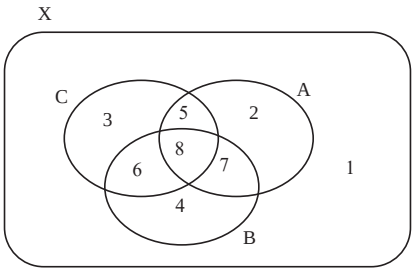
Zadanie 2.19

W zbiorze A znajdują się następujące elementy: a, b, c, f, natomiast w zbiorze B: b, c, d, f. Jakie elementy należą do różnicy zbiorów A z B, a jakie do różnicy B z A?

Zadanie 2.20

Na poniższym rysunku zbiory A, B, C zawierają się w zbiorze X. Na diagramie poszczególne obszary zostały oznaczone liczbami. Określ zbiory odpowiadające obszarom oznaczonym przez liczby:

a) 1,
b) 2,
c) 5,
d) 8 i 5,
e) 6 i 4,
f) 3, 5 i 6,
g) 5, 6, 7 i 8,
h) 1, 3, 4 i 6.



Zadanie 2.21

Niech dane będą zbiory: A = {1, 2, 3, 7}, B = {1, 5, 6, 8, 9}, C = {2, 4, 6, 8}. Wykonaj poniższe działania.

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $(A \cap B \cap C) \cup C$
c) $(C \setminus B) \cup A$
d) $(C \setminus B) \cap C$
e) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$

Zadanie 2.22

Niech X będzie zbiorem liczb jednocyfrowych, zaś A zbiorem zawierającym liczby nie większe od 4. Dopełnieniem zbioru A do przestrzeni X będzie zbiór zawierający:

a) wszystkie liczby większe lub równe 4,
b) wszystkie liczby mniejsze od 4,
c) wszystkie liczby mniejsze lub równe 4,
d) wszystkie liczby większe od 4.

Zadanie 2.23

Na *koniczynce* zakreśl wyniki działań na zbiorach A, B i C.

a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cap (B \cup C)$
c) $(A \cup B) \backslash C$
d) $(A \backslash B) \cup (A \cap C)$
e) $C \cup (A \backslash B)$
f) $(A \cup C) \backslash (A \cap B)$
g) $(A \backslash B) \cup (C \backslash A)$
h) $A \backslash (B \backslash C)$

Zadanie 2.24

Za pomocą digramów Venna uzasadnij, że zachodzą poniższe równości.

a) $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$
b) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ (*prawo de Morgana*[12])
c) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ (*prawo de Morgana*)
d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (*prawo rozdzielności iloczynu względem sumy*)
e) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (*prawo rozdzielności sumy względem iloczynu*)
f) $(A \cap B) \backslash C = B \cap (A \backslash C)$
g) $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$

---

[12] Augustus de Morgan (1806–1871) – angielski matematyk i logik; zajmował się głównie logiką formalną i teorią szeregów.

h) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
i) $A \cap (A \cup B) = A$ (*prawo absorpcji*)
j) $A \cup (A \cap B) = A$ (*prawo absorpcji*)

Zadanie 2.25

Wyznacz taki zbiór X, dla którego prawdziwa jest poniższa równość:

a) $X \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$
b) $X \setminus \{x\} = \emptyset$
c) $\{a, b, c, d\} \setminus (\{a, b\} \cup X) = \{d\}$
d) $(X \cap \{2, 4, 6, 8\}) \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Zadanie 2.26

Podaj przykład zbiorów A i B takich, że zbiór A ma trzy elementy, a zbiór B ma sześć elementów oraz:

a) zbiór $A \cup B$ ma 9 elementów,
b) zbiór $A \cup B$ ma 6 elementów,
c) zbiór $A \cup B$ ma 8 elementów,
d) zbiór $A \cap B$ ma 3 elementy,
e) zbiór $B \setminus A$ ma 4 elementy.

Zadanie 2.27

Oceń wartość logiczną zdań[13]:

a) Każda liczba całkowita jest liczbą dodatnią.
b) Każda liczba całkowita jest liczbą naturalną.
c) Każda liczba całkowita niedodatnia jest liczbą większą od zera.
d) Każda liczba całkowita nieujemna jest liczba naturalną.
e) Liczba przeciwna do danej liczby całkowitej jest liczbą naturalną.

---

[13] Pamiętajcie! Przyjmujemy, że zero jest liczbą naturalną.

3. Przyporządkowywanie zbiorów

Do tej pory zajmowaliśmy się zbiorami i działaniami na zbiorach. W tym rozdziale będziemy przyporządkowywać elementy jednego zbioru elementom innego zbioru. Przyporządkowanie zwane zamiennie odwzorowywaniem jest pojęciem matematycznym, które – jak wiele innych – swoje źródło ma w życiu codziennym. Przyporządkowania stosujemy powszechnie, niekoniecznie tak je nazywając, np. numerowi linii autobusu w danym mieście przyporządkowana jest trasa przejazdu, każdy uczeń w szkole przyporządkowany jest do klasy, każdy samochód w danym momencie ma przyporządkowany numer rejestracyjny pojazdu czy każdy student ma przyporządkowaną uczelnię, na której postanowił studiować. Nikt do dziś nie policzył, ile takich przyporządkowań funkcjonuje na świecie, ale nie to jest ważne. Istotne jest to, po co je tworzymy i do czego możemy je wykorzystać.

Naszą przygodę z przyporządkowaniami rozpoczniemy od wyszczególnienia tzw. par uporządkowanych. Niech dane będą zbiory $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{a, b\}$. Utwórzmy z tych zbiorów wszystkie możliwe pary takie, że pierwszy element pary należy do zbioru A, zaś drugi do zbioru B. Otrzymujemy w taki sposób następujący zestaw par: (x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b). Zwróćmy uwagę, że nasz zestaw nie uwzględnia pary np. (a, x). Ma to związek ze sposobem, w jaki postanowiliśmy te pary tworzyć. Na początku przyjęliśmy, że pierwszy element pary jest z pierwszego zbioru, a drugi z drugiego. Zatem w naszym przypadku $(x, a) \neq (a, x)$ i co więcej, ta druga para nie jest możliwa do uzyskania przy tak wybranych zbiorach A i B.

O parze uporządkowanej

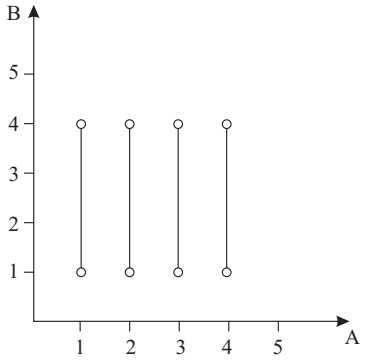
Parą uporządkowaną (a, b) będziemy nazywali taką parę, w której na pierwszym miejscu stoi a, a na drugim b. Zamiana miejsc a z b tworzy zupełnie inną parę, o ile $a \neq b$. Pierwszy element pary uporządkowanej nazywamy poprzednikiem, a drugi następnikiem.

Wprost z powyższej definicji wynikają następujące własności:

(1) $(a, b) \neq (b, a)$ dla $a \neq b$
(2) $[(a, b) = (b, a)] \Leftrightarrow a = b$
(3) $[(a, b) = (c, d)] \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$

Przykłady uporządkowanych par odnajdujemy w wielu dziedzinach, np. w sporcie, gdzie wynik meczu Pogoń Szczecin – Raków Częstochowa wyniósł (2 : 1) i zamiana miejscami 1 z 2 znaczyłaby, że Pogoń przegrała. Innym przykładem par uporządkowanych są współrzędne punktu na płaszczyźnie, gdzie zamiana odciętej z rzędną przy różnych współrzędnych wyznacza zupełnie inny punkt. Oczywiście skoro określono pary uporządkowane, to istnieją również nieuporządkowane. Przykładem par nieuporządkowanych może być zestaw możliwych wyników przy jednokrotnym rzucie monetą, tj. {orzeł, reszka}. Z racji tego, że nasze rozważania dotyczą matematyki, skoncentrujemy się jednak na parach uporządkowanych. Dla matematyków to one mają większą wartość.

Oczywiście oprócz uporządkowanych par są jeszcze uporządkowane trójki, czwórki itd. Przykładem uporządkowanej trójki może być punkt przestrzeni trójwymiarowej o współrzędnych (2, 3, 4). Wypisywanie uporządkowanych par czy trójek dla zbiorów o niewielkiej liczbie elementów może być pracochłonne, ale możliwe do wykonania. Czynność ta staje się niemożliwa wówczas, gdy chociażby jeden ze zbiorów jest nieskończony. Matematycy w takich sytuacjach do wyznaczenia uporządkowanych par, trójek itd. posługują się zapisem symbolicznym lub rysunkiem. Dla $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{y \in R: 1 < y < 4\}$ zbiór wszystkich uporządkowanych par wygląda następująco:



3.1. Iloczyn kartezjański

Wróćmy jeszcze na chwilę do par uporządkowanych. Dla przykładu weźmy dwa zbiory A i B oraz przyporządkowanie zbioru A w zbiór B. Zastanówmy się, jakie pary uporządkowane otrzymamy w tym przypadku.

Tabela 5. Przykłady par uporządkowanych dla zbiorów A, B

Wybrane zbiory	Przykłady par uporządkowanych
A = {♣, ♦, ♥, ♠} B = {a, b}	(♣, a), (♦, a), (♥, a), (♠, a), (♦, b), (♥, b), (♠, b)
A = {Δ, ☐} B = {5, 6, 7}	(Δ, 5), (☐, 5), (☐, 6), (☐, 7)

Źródło: opracowanie własne.

Zwróćmy uwagę, że w tabeli 5 nie wypisano wszystkich uporządkowanych par. Podano tylko ich przykłady. Po uzupełnieniu przykładów wypisanych w pierwszym wierszu o parę (♣, b), a w drugim o (Δ, 6) i (Δ, 7), otrzymamy zbiór wszystkich możliwych par uporządkowanych. I taki właśnie stał się przedmiotem badań matematyków.

O iloczynie kartezjańskim

Iloczynem kartezjańskim (produktem kartezjańskim) dwóch dowolnych zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych par takich, że poprzednik należy do zbioru A, a następnik do zbioru B. Oznaczamy go symbolem A × B.

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$$

Przykłady

- Niech dane będą zbiory A = {a, b, c, d, e, f, g, h} oraz B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Iloczyn kartezjański tych zbiorów ma postać:

  A × B = {a, b, c, d, e, f, g, h} × {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (a, 6), (a, 7), (a, 8), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (b, 5), (b, 6), (b, 7),

(b, 8), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (c, 7), (c, 8), (d, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4), (d, 5), (d, 6), (d, 7), (d, 8), (e, 1), (e, 2), (e, 3), (e, 4), (e, 5), (e, 6), (e, 7), (e, 8), (f, 1), (f, 2), (f, 3), (f, 4), (f, 5), (f, 6), (f, 7), (f, 8), (g, 1), (g, 2), (g, 3), (g, 4), (g, 5), (g, 6), (g, 7), (g, 8), (h, 1), (h, 2), (h, 3), (h, 4), (h, 5), (h, 6), (h, 7), (h, 8)}. Tak otrzymaliśmy zbiór par opisujących pola szachownicy 8 × 8.

✕ Spróbujmy wyznaczyć iloczyn kartezjański dla trzech, a następnie dla czterech zbiorów.

– Niech dane będą zbiory A = {a, b}, B = {1, 2, 3}, C = {♦, ♣, ♠, ♥}, D = {Δ, ☐}. Aby wyznaczyć A × B × C, wyznaczamy A × B, a następnie (A × B) × C.
A × B = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)},
(A × B) × C = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)} × {♦, ♣, ♠, ♥} = {(a, 1, ♦), (a, 2, ♦), (a, 3, ♦), (b, 1, ♦), (b, 2, ♦), (b, 3, ♦), (a, 1, ♣), (a, 2, ♣), (a, 3, ♣), (b, 1, ♣), (b, 2, ♣), (b, 3, ♣), (a, 1, ♠), (a, 2, ♠), (a, 3, ♠), (b, 1, ♠), (b, 2, ♠), (b, 3, ♠), (a, 1, ♥), (a, 2, ♥), (a, 3, ♥), (b, 1, ♥), (b, 2, ♥), (b, 3, ♥)}.
– Aby wyznaczyć A × B × C × D wyznaczamy A × B, następnie (A × B) × C, by wreszcie określić ((A × B) × C) × D.
((A × B) × C) × D = ({(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)} × {♦, ♣, ♠, ♥}) × {Δ, ☐} = {(a, 1, ♦), (a, 2, ♦), (a, 3, ♦), (b, 1, ♦), (b, 2, ♦), (b, 3, ♦), (a, 1, ♣), (a, 2, ♣), (a, 3, ♣), (b, 1, ♣), (b, 2, ♣), (b, 3, ♣), (a, 1, ♠), (a, 2, ♠), (a, 3, ♠), (b, 1, ♠), (b, 2, ♠), (b, 3, ♠), (a, 1, ♥), (a, 2, ♥), (a, 3, ♥), (b, 1, ♥), (b, 2, ♥), (b, 3, ♥)} × {Δ, ☐} = {(a, 1, ♦, Δ), (a, 2, ♦, Δ), (a, 3, ♦, Δ), (b, 1, ♦, Δ), (b, 2, ♦, Δ), (b, 3, ♦, Δ), (a, 1, ♣, Δ), (a, 2, ♣, Δ), (a, 3, ♣, Δ), (b, 1, ♣, Δ), (b, 2, ♣, Δ), (b, 3, ♣, Δ), (a, 1, ♠, Δ), (a, 2, ♠, Δ), (a, 3, ♠, Δ), (b, 1, ♠, Δ), (b, 2, ♠, Δ), (b, 3, ♠, Δ), (a, 1, ♥, Δ), (a, 2, ♥, Δ), (a, 3, ♥, Δ), (b, 1, ♥, Δ), (b, 2, ♥, Δ), (b, 3, ♥, Δ), (a, 1, ♦, ☐), (a, 2, ♦, ☐), (a, 3, ♦, ☐), (b, 1, ♦, ☐), (b, 2, ♦, ☐), (b, 3, ♦, ☐), (a, 1, ♣, ☐), (a, 2, ♣, ☐), (a, 3, ♣, ☐), (b, 1, ♣, ☐), (b, 2, ♣, ☐), (b, 3, ♣, ☐), (a, 1, ♠, ☐), (a, 2, ♠, ☐), (a, 3, ♠, ☐), (b, 1, ♠, ☐), (b, 2, ♠, ☐), (b, 3, ♠, ☐), (a, 1, ♥, ☐), (a, 2, ♥, ☐), (a, 3, ♥, ☐), (b, 1, ♥, ☐), (b, 2, ♥, ☐), (b, 3, ♥, ☐)}.

Powyższy przykład umieściłam celowo. Nie ma on dużej wartości matematycznej, chciałam jedynie podkreślić, że dążenia matematyków do prostoty i elegancji wyrażania myśli są jak najbardziej zasadne. Szczególnie wtedy, gdy zapisanie rozwiązania jest tak żmudne, jak w naszym przykładzie.

Oczywiście iloczyn kartezjański nie musi być określony na różnych zbiorach. W sytuacji, gdy A = B, iloczyn kartezjański $A \times A = A^2 = \{(a, b): a \in A \wedge b \in A\}$. Na przykład dla $A = \{a, b\}$ otrzymujemy $A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. Iloczyn kartezjański określony na tym samym zbiorze nazywamy *kwadratem kartezjańskim*. Analogicznie wyznaczamy uporządkowane trójki, czwórki itd.

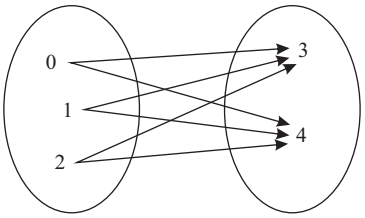
$A^3 = \{(a, b, c): a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A\}$
$A^4 = \{(a, b, c, d): a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A \wedge d \in A\}$
$A^5 = \{(a, b, c, d, e): a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A \wedge d \in A \wedge e \in A\}$
…

Iloczyn kartezjański zbiorów możemy zilustrować za pomocą grafu strzałkowego, tabeli lub w układzie współrzędnych.

Przykłady

× Niech dane będą zbiory A i B takie, że $A = \{0, 1, 2\}$ oraz $B = \{3, 4\}$. Iloczyn kartezjański tych zbiorów to $A \times B = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$:

– w formie grafu strzałkowego przyjmuje postać:

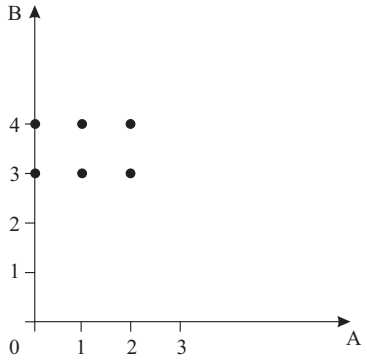


– w formie tabeli:

↗	3	4
0	(0, 3)	(0, 4)
1	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 3)	(2, 4)

Uwaga: strzałka oznacza kierunek przyporządkowania.

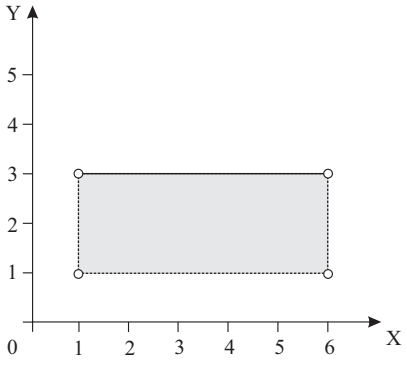
– w prostokątnym układzie współrzędnych:



Na wykresie kropkami zaznaczono pary należące do iloczynu kartezjańskiego.

✕ Niech dane będą teraz zbiory X i Y takie, że

$X = \{x \in R: 1 < x < 6\}$ oraz $Y = \{y \in R: 1 < y \leq 3\}$. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono zbiór wszystkich punktów należących do $X \times Y$.



W przypadku zbioru punktów na płaszczyźnie musimy zwracać uwagę na punkty brzegowe. Linią ciągłą zaznaczono zbiór punktów, które należą do iloczynu kartezjańskiego. Linia przerywana oznacza, że punkty o poprzedniku 1 i 6 oraz następniku 1 nie należą do rozwiązania. Wynika to z przyjęcia zbiorów X i Y, dla których ten iloczyn określono.

Dla iloczynu kartezjańskiego, tak jak dla każdego zdefiniowanego pojęcia matematycznego, poszukuje się własności. To one pozwalają dogłębnie poznać

możliwości i zastosowania obiektu matematycznego. Wśród własności iloczynu kartezjańskiego wyróżniamy:

(1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
(2) $A \times B \neq B \times A$, gdy $A \neq B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
(3) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Z pierwszej własności dowiadujemy się, że iloczyn kartezjański dowolnego zbioru ze zbiorem pustym zawsze jest zbiorem pustym. Druga mówi o nieprzemienności iloczynu kartezjańskiego, a trzecia o jego łączności. Spróbujmy teraz uzasadnić twierdzenie o liczbie par uporządkowanych należących do iloczynu kartezjańskiego.

O liczbie par iloczynu kartezjańskiego

Jeżeli A jest zbiorem *n*-elementowym, a B zbiorem *m*-elementowym, to $A \times B$ jest zbiorem złożonym z $n \cdot m$ uporządkowanych par (a, b) takich, że $a \in A$ i $b \in B$.

Uzasadnienie

Niech *m* będzie dowolną liczbą naturalną i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Dla $n = 1$ zbiór $A = \{a_1\}$ i $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m)\}$, zatem iloczyn kartezjański zbiorów A i B będzie zawierał $1 \cdot m = m$ par uporządkowanych. Jeśli teraz przyjmiemy, że $A = \{a_1, a_2\}$, to iloczyn będzie miał postać:

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m) \\ &(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_m)\} \end{aligned}$$

Wtedy $A \times B$ będzie składał się z $2 \cdot m = 2m$ par uporządkowanych. Zwiększając zbiór A o kolejne elementy, otrzymamy prostokątną tablicę par o *n* wierszach i *m* kolumnach:

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m) \\ &(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(a_n, b_1), (a_n, b_2), \ldots, (a_n, b_m)\} \end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że iloczyn kartezjański A × B zawiera $n \cdot m$ par uporządkowanych (a, b) takich, że a ∈ A i b ∈ B.

Powyższe uzasadnienie nie jest formalnym dowodem matematycznym. Mimo to jest dobrym przykładem intuicyjnego poszukiwania rozwiązań. A jak wiemy, to intuicja jest przyczyną wielkich odkryć.

Może wydać się to zaskakujące, ale iloczyn kartezjański pojawia się już we wczesnej edukacji. Zazwyczaj przyjmuje postać prostokątnych tabelek. Rozważmy jeden z takich przykładów. W tabeli 6 przedstawiono możliwe wybory strojów karnawałowych trzech dziewczynek.

Tabela 6. Możliwe wybory strojów karnawałowych trzech dziewcząt

	Stroje karnawałowe			
	Bella	Dzwoneczek	Elsa	Vaiana
Kasia	+	+	+	+
Ania	+	+	+	+
Monika	+	+	+	+

Źródło: opracowanie własne.

Zapisując informacje z tabeli 6 w formie iloczynu kartezjańskiego, uzyskalibyśmy postać:

{(K, B), (K, D), (K, E), (K, V), (A, B), (A, D), (A, E), (A, V), (M, B), (M, D), (M, E), (M, V)}, gdzie K, A, M są pierwszymi literami dziewcząt, zaś B, D, E, V pierwszymi literami bohaterek bajek, za które mogą przebrać się dziewczynki. Jeśli teraz w naszej tabeli umieścimy wybory dziewczynek z dwóch ostatnich lat, to tabela 6 przyjmuje postać tabeli 7.

Tabela 7. Wybory strojów karnawałowych trzech dziewcząt z ostatnich dwóch lat

	Stroje karnawałowe			
	Bella	Dzwoneczek	Elsa	Vaiana
Kasia	+			+
Ania		+	+	
Monika		+		+

Źródło: opracowanie własne.

Pary opisujące wybory dziewczynek z ostatnich dwóch lat również tworzą zbiór, tj. {(K, B), (K, V), (A, D), (A, E), (M, D), (M, V)}. Okazuje się, że zbiór ten jest podzbiorem zbioru wszystkich możliwych wyborów dziewcząt (tab. 6). Zagadnienie podzbiorów omawialiśmy w rozdziale drugim i wszystko, czego się dowiedzieliśmy poprzednio, wykorzystamy, aby otworzyć kolejne drzwi. Drzwi, za którymi znajdują się nowe pojęcia matematyczne i ich własności.

3.2. Relacje i ich własności

Słowo „relacje" niejednokrotnie pojawiało się na stronach tego opracowania. Zazwyczaj posługujemy się nim w matematyce wtedy, gdy chcemy opisać związki między obiektami matematycznymi. Przed wprowadzeniem definicji relacji powróćmy jeszcze raz do przykładu z wyborami strojów karnawałowych. Przypomnijmy, pierwsza tabelka (tab. 6) prezentowała wszystkie możliwe wybory dziewczynek, natomiast druga (tab. 7) tylko te stroje, które zostały wybrane w ciągu ostatnich dwóch lat. Prześledźmy całą sytuację od początku.

W naszym wypadku punktem wyjścia są dwa zbiory, tj. A – zbiór dziewczynek dokonujących wyboru stroju karnawałowego oraz B – zbiór strojów karnawałowych. Zbiór wszystkich możliwych wyborów dziewczynek możemy opisać $A \times B$, natomiast analizując tabelkę opisującą wybory dziewczynek z ostatnich dwóch lat, możemy powiedzieć, że tylko pewne elementy zbioru A są w relacji z pewnymi elementami zbioru B (np. Kasia wybrała strój Belli). Oznaczając relację między elementami zbiorów przez ρ[1], możemy zapisać

$$\rho \subset A \times B$$

gdzie ρ = {(K, B), (K, V), (A, D), (A, E), (M, D), (M, V)}, zaś $A \times B$ = {(K, B), (K, D), (K, E), (K, V), (A, B), (A, D), (A, E), (A, V), (M, B), (M, D), (M, E), (M, V)}.

[1] ρ – (czyt. ro) litera alfabetu greckiego.

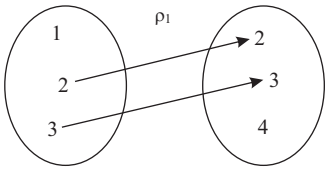
O relacji dwuczłonowej

Relacją dwuczłonową ρ w iloczynie $A \times B$, gdzie A i B są dowolnymi zbiorami, nazywamy dowolny podzbiór tego iloczynu. Mówimy, że element $a \in A$ pozostaje w relacji z $b \in B$, co zapisujemy $a\rho b$ lub $(a, b) \in \rho$. Zbiór poprzedników wszystkich par należących do relacji nazywamy *dziedziną relacji*, zaś zbiór następników tych par *przeciwdziedziną relacji*.

Przykłady

- Niech dane będą zbiory $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$. W zbiorze $A \times B$ określono relacje $\rho_1 = \{(a, b) \in A \times B: a = b\}$ oraz $\rho_2 = \{(a, b) \in A \times B: a > b\}$.

ρ_1	2	3	4
1			
2	+		
3		+	



Do relacji ρ_1 należą dwie uporządkowane pary: (2, 2) oraz (3, 3). Dziedziną i przeciwdziedziną ρ_1 jest zbiór $\{2, 3\}$. Relacja ρ_2 zawiera tylko jedną parę uporządkowaną, czyli $(3, 2) \in \rho_2$. Dziedziną ρ_2 jest zbiór $\{3\}$, a przeciwdziedziną ρ_2 jest $\{2\}$.

- Uczniowie pewnej klasy trzeciej postanowili przygotować ozdoby na choinkę, która miała stanąć w szkolnym holu. Zdecydowali, że przygotują dwukolorowe bombki styropianowe. W wybranej przez nich palecie barw znalazły się srebrny, złoty i czerwony. Poniższa tabelka wskazuje, które bombki udało się dzieciom uzyskać.

	Srebrny (S)	Złoty (Z)	Czerwony (C)
Srebrny (S)		(S, Z)	(S, C)
Złoty (Z)	(Z, S)		(Z, C)
Czerwony (C)	(C, S)	(C, Z)	

Do relacji „bombki choinkowe” należy sześć dwukolorowych wzorów. Dziedziną i przeciwdziedziną relacji jest zbiór $\{S, Z, C\}$. Wśród wzorów bombek nie ma bombek jednokolorowych. Możemy powiedzieć, że pary (S, S), (Z, Z), (C, C) nie należą do relacji „bombki choinkowe”.

W definicji określiliśmy relację dwuczłonową jako podzbiór pewnego iloczynu kartezjańskiego. A skoro jest ona podzbiorem, to zgodnie z tym, co powiedzieliśmy w drugim rozdziale, istnieje relacja, do której nie należy żadna uporządkowana para. Taką relację nazywamy *relacją pustą*. Przykładem takiej relacji określonej w zbiorze $A \times B$, gdzie $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$ będzie relacja $\rho_3 = \{(a, b) \in A \times B: a + 2022 < b\}$. Na drugim biegunie możliwych do wyznaczenia relacji danego iloczynu kartezjańskiego znajduje się taka, która składa się z tych samych uporządkowanych par, co iloczyn kartezjański. Taką relację nazywamy *relacją pełną*. Przykładem relacji pełnej będzie zbiór uzyskanych par podczas dwukrotnego rzutu monetą, tj. $\{(O, O), (O, R), (R, R), (R, O)\}$.

Zwróćmy uwagę, że zarówno relacja pusta, jak i relacja pełna niewiele wnoszą do naszych rozważań. Podkreślenie ich obecności miało za zadanie zwrócić uwagę czytelnika na rangę rozważenia wszystkich możliwych przypadków nawet wtedy, gdy są mało ciekawe matematycznie. Odwołując się do podzbiorów zbioru, warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden, myślę, ciekawy fakt. Zastanówmy się teraz, ile możliwych relacji mogę uzyskać w zbiorze $A \times B$, gdzie $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$. Poszukując odpowiedzi, połączymy informacje z rozdziału drugiego i trzeciego. Na podstawie informacji o liczbie możliwych do uzyskania par uporządkowanych wiemy, że iloczyn kartezjański naszych zbiorów zawiera 4 pary. Ze sposobu wyznaczania liczby podzbiorów danego zbioru wiemy, że możemy wyznaczyć $2^4 = 16$ różnych relacji. Teraz dla dowolnych dwóch zbiorów skończonych będziemy mogli przewidzieć liczbę różnych relacji, jakie możemy utworzyć.

Własności relacji

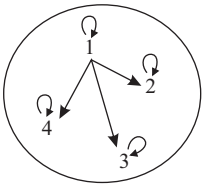
Zdefiniowaliśmy pojęcie relacji i przeanalizowaliśmy kilka przykładów. Teraz czas na własności nowego pojęcia. W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na relacjach określonych w dowolnym zbiorze X, czyli takich, które są podzbiorami zbioru $X \times X$ (lub X^2).

(1) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *zwrotna* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru X pozostaje w relacji sam z sobą, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{zwrotna} \Leftrightarrow \forall_{x \in R} (x \rho x)$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. Relację ρ przedstawiono za pomocą grafu strzałkowego oraz tabeli, gdzie znakiem + zaznaczono parę należącą do relacji.



ρ	1	2	3	4
1	+	+	+	+
2		+		
3			+	
4				+

Relacja ρ jest zwrotna, bo każdy element zbioru, w którym została określona, pozostaje w relacji sam z sobą. Na grafie jest to zaznaczone pętelkami ze strzałką, natomiast w tabeli przekątna jest wypełniona przez pary należące do relacji.

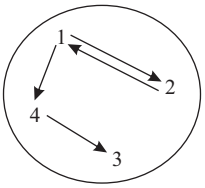
- Innym przykładem relacji zwrotnej jest zbiór prostych równoległych na płaszczyźnie, bo każda prosta jest równoległa do samej siebie.
- Zwrotna jest relacja podzielności w zbiorze liczb naturalnych dodatnich, bo każda liczba naturalna z wyjątkiem 0 jest swoim własnym dzielnikiem.
- Zwrotna jest także relacja $\leq$ w zbiorze liczb rzeczywistych, bo $x \leq x$ jest prawdą dla każdej liczby rzeczywistej.

(2) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *przeciwzwrotna* wtedy i tylko wtedy, gdy żaden element zbioru X nie pozostaje w relacji sam z sobą, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{przeciwzwrotna} \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \sim(x \, \rho \, x)$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(2, 1), (1, 2), (4, 3), (1, 4)\}$.



ρ	1	2	3	4
1		+		+
2	+			
3				
4			+	

Relacja ρ jest przeciwzwrotna, bo żaden element zbioru, w którym relacja została określona, nie jest w relacji sam z sobą. Na grafie żadna strzałka nie prowadzi od elementu do niego samego (brak pętelek), natomiast w tabeli przekątna nie jest wypełniona przez żadną parę należącą do relacji.

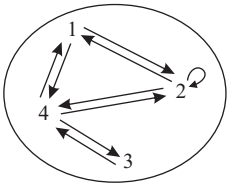
- Relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych jest relacją przeciwzwrotną, ponieważ warunek $x < x$ nie jest prawdziwy dla żadnej liczby rzeczywistej.

(3) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *symetryczna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów x, y ze zbioru X, z faktu, że x jest w relacji z y wynika, że y jest w relacji z x, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{symetryczna} \Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} (x \rho y) \Rightarrow (y \rho x)$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3,4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.



ρ	1	2	3	4
1		+		+
2	+	+		+
3				+
4	+	+	+	

Relacja ρ jest symetryczna. Aby się o tym przekonać, wystarczy prześledzić pary należące do relacji, np. jeśli $(1, 2) \in \rho$, to $(2, 1) \in \rho$. Na grafie symbolizują to podwójne strzałki, np. strzałka prowadzi od 4 do 1 i odwrotnie. Natomiast w tabeli pary układają się symetrycznie względem przekątnej tabeli.

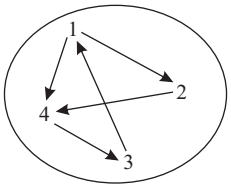
- Relacja równości w zbiorze liczb rzeczywistych jest symetryczna, bo z faktu, że $x = y$ zawsze wynika, że $y = x$.

(4) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *przeciwsymetryczna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów x, y ze zbioru X z faktu, że x jest w relacji z y wynika, że y nie jest w relacji z x, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{przeciwsymetryczna} \Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, (x\ \rho\ y) \Rightarrow \sim(y\ \rho\ x)$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$.



ρ	1	2	3	4
1		+		+
2				+
3	+			
4			+	

Relacja ρ jest przeciwsymetryczna. Wśród wszystkich par należących do relacji nie ma ani jednej, dla której z faktu $(x, y) \in \rho$ wynikałoby, że $(y, x) \in \rho$. Na grafie nie ma strzałek podwójnych, a w tabeli pary nie są ułożone symetrycznie względem przekątnej.

- Relacja $<$ jest przeciwsymetryczna, bo jeśli $x < y$, to nieprawdą jest, że $y < x$.

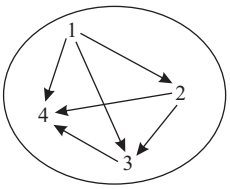
(5) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *antysymetryczna* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów x, y ze zbioru X z faktu, że x jest w relacji z y i y jest w relacji z x wynika, że x jest równe y, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{antysymetryczna} \Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, [(x\ \rho\ y) \wedge (y\ \rho\ x)] \Rightarrow x = y$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. Transpozycja implikacji zawartej w warunku relacji antysymetrycznej pozwala nam twierdzić, że

$$\rho \text{ jest } \textit{antysymetryczna} \Leftrightarrow \forall_{x,y \in X}\, x \neq y \Rightarrow [\sim(x\ \rho\ y) \vee \sim(y\ \rho\ x)]$$



ρ	1	2	3	4
1		+	+	+
2			+	+
3				+
4				

Relacja ρ jest antysymetryczna. Wśród wszystkich par należących do relacji nie ma ani jednej, dla której z faktu, że $(x, y) \in \rho$ wynikałoby, że $(y, x) \in \rho$. Na grafie nie ma strzałek podwójnych, a w tabeli pary nie są ułożone symetrycznie względem przekątnej.

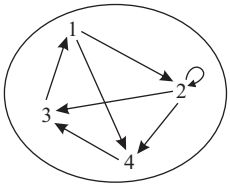
- Relacja $\leq$ jest relacją antysymetryczną, bo z faktu, że $x \leq y$ i $y \leq x$ wynika, że $x = y$.
- Relacja inkluzji zbiorów jest również antysymetryczna, bo jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to na podstawie definicji równości zbiorów wiemy, że zbiory A i B są równe.

(6) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *spójną* w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów $x, y \in X$ x jest w relacji z y lub y jest w relacji z x, lub $x = y$, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{spójna} \Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} [(x \rho y) \vee (y \rho x) \vee (x = y)]$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$.



ρ	1	2	3	4
1		+		+
2		+	+	+
3	+			
4			+	

Relacja ρ jest spójna. Wśród wszystkich par należących do relacji każdy element zbioru x jest w relacji z y lub y jest w relacji z x lub x i y są sobie równe. Na grafie od każdego elementu odchodzi strzałka lub do niego dochodzi,

a w tabeli w każdym wierszu i w każdej kolumnie mamy parę należącą do relacji.

- Relacje $<$ oraz $\leq$ są spójne w $\mathbb{N}$, bo dla każdej liczby naturalnej prawdą jest, że:

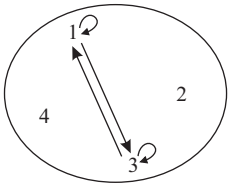
$$x < y \vee y < x \vee x = y \quad \text{oraz} \quad x \leq y \vee y \leq x \vee x = y$$

(7) Relacja $\rho \subset X^2$ jest *przechodnia* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów x, y, z ze zbioru X z faktu, że x jest w relacji z y i y jest w relacji z z wynika, że x jest w relacji z z, czyli

$$\rho \text{ jest } \textit{przechodnia} \Leftrightarrow \forall_{x,y,z \in X} [(x \rho y) \wedge (y \rho z)] \Rightarrow (x \rho z)$$

Przykłady

- Niech dana będzie relacja $\rho \subset X^2$, gdzie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $\rho = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$.



ρ	1	2	3	4
1	+		+	
2				
3	+		+	
4				

Relacja ρ jest przechodnia, bo dla każdej uporządkowanej pary $(x, y) \in \rho$ i każdej $(y, z) \in \rho$, para (x, z) również należy do relacji ρ.

- Relacja podzielności w zbiorze liczb naturalnych jest przechodnia, bo jeśli x jest dzielnikiem y i y dzielnikiem z, to x jest dzielnikiem z.
- Relacja inkluzji zbiorów jest również przechodnia, bo jeśli $A \subset B$ i $B \subset C$, to $A \subset C$.
- Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie jest przechodnia, bo jeśli prosta $k \| l$ i $l \| m$, to proste k i m też są równoległe.

Analizując powyższe przykłady, nietrudno dostrzec, że posiadanie jednej własności nie wyklucza posiadania innej. Matematycy dostrzegli ten fakt i wyróżnili relacje, które jednocześnie posiadają kilka z powyższych własności. Przykładami takich relacji będą: relacja równoważności, relacja częściowego uporządkowania i relacja całkowitego uporządkowania.

O relacji równoważności

Relacja $\rho \subset X \times X$ jest relacją równoważności w X jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady

- Relacja równości zbiorów będzie relacją równoważności na mocy definicji zbiorów równych. Zauważmy, że:
  - każdy zbiór jest sobie równy (zwrotność relacji),
  - jeśli zbiór A jest równy B, to B będzie równy A (symetryczność relacji),
  - jeśli zbiór A jest równy B i B jest równy C, to A jest równy C (przechodniość relacji).
- Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie jest również relacją równoważności, bo jak pokazano w powyższych przykładach, jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

O relacji częściowo porządkującej

Relacja $\rho \subset X \times X$ jest relacją częściowo porządkującą X, jeśli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Natomiast zbiór X, w którym ta relacja została określona, nazywamy zbiorem częściowo uporządkowanym.

Przykłady

- Relacja $\subseteq$ zbiorów jest relacją częściowo porządkującą, bo jest zwrotna (każdy zbiór jest swoim podzbiorem), antysymetryczna i przechodnia (co omówiono w przykładach ilustrujących własności relacji).
- Relacja $\leq$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest częściowo porządkująca, bo jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Zbiór liczb rzeczywistych jest częściowo uporządkowany przez relację $\leq$.

O relacji całkowicie porządkującej

Relacja $\rho \subset X \times X$ jest relacją całkowicie porządkującą zbiór X, jeśli jest antysymetryczna, spójna i przechodnia. Natomiast zbiór X, w którym ta relacja została określona, nazywamy zbiorem całkowicie uporządkowanym.

Przykłady

- Relacja $<$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest relacją całkowicie porządkującą, bo jest antysymetryczna, spójna i przechodnia, co pokazano w opisywanych przykładach własności relacji. Zatem relacja $<$ ustala całkowity porządek w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Relacja inkluzji zbiorów jest relacją całkowicie porządkującą.

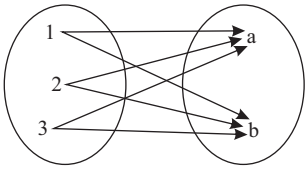
3.3. Funkcje jako relacje

Funkcję będziemy uważali za pewien specjalny rodzaj relacji, tzn. za pewien zbiór par uporządkowanych spełniających określone warunki. Jednak zanim do niej przejdziemy, przypomnijmy sobie krótko, co ważnego do tej pory powiedzieliśmy o iloczynie kartezjańskim i relacjach dwuczłonowych. Zbudujmy przykładowy iloczyn kartezjański i rozważmy kilka wybranych relacji.

Przykład

- Niech dane będą dwa zbiory $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Iloczyn kartezjański tych zbiorów będzie wyznaczał zbiór wszystkich możliwych przyporządkowań między elementami każdego z tych zbiorów.

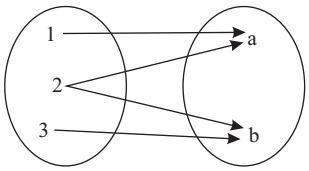
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$



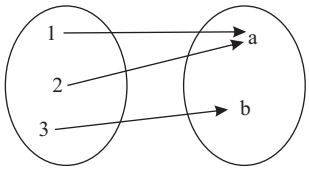
Zbiór A jest zbiorem trzyelementowym, a B dwuelementowym zatem wszystkich uporządkowanych par w iloczynie kartezjańskim tych zbiorów jest $3 \cdot 2 = 6$. Wiemy również, że relacja jest dowolnym podzbiorem iloczynu,

zatem liczba wszystkich możliwych relacji to $2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$. Wybieramy kilka z nich i prezentujemy za pomocą grafów.

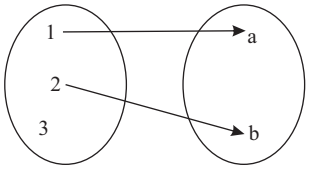
Graf 1



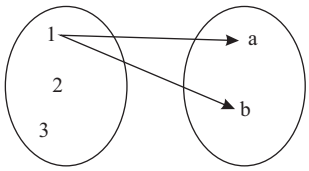
Graf 2



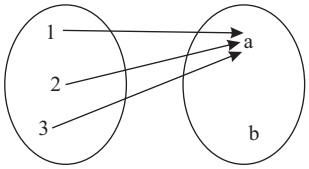
Graf 3



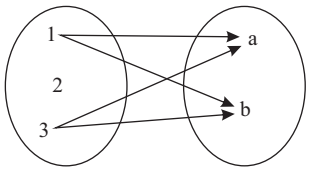
Graf 4



Graf 5



Graf 6



Przyjrzyjmy się teraz naszym dowolnie wybranym relacjom i spróbujmy określić, jakie cechy posiada każda z nich. Grafy 1, 2 i 5 możemy określić jako przyporządkowanie wykorzystujące każdy element zbioru A. Pozostałe, przedstawione na grafach 3, 4 i 6, nie posiadają tej własności. Nas będą interesowały właśnie te relacje, w których każdy element zbioru A jest w relacji z elementem zbioru B, dlatego nasza uwaga koncentruje się tylko na relacjach przedstawionych na grafach 1, 2, i 5. Porównując sposób, w jaki określono przyporządkowanie między elementami tych zbiorów, dostrzegamy, że relacje 2 i 5 również mają wspólną własność, mianowicie taką, że każdy element ze zbioru A został przyporządkowany tylko raz. Tylko raz, czyli mówiąc językiem grafów, od każdego elementu ze zbioru A wychodzi dokładnie jedna strzałka. Takiej własności nie posiada relacja przedstawiona za pomocą grafu 1. Krótko podsumowując, wybrane przez nas relacje zilustrowane grafami 2 i 5 posiadają dwie ważne własności. Pierwsza mówi o wykorzystaniu wszystkich elementów ze zbioru, w którym określona jest relacja, a druga o jednokrotnym przyporządkowaniu tych elementów elementom zbioru B. Takie relacje będziemy nazywali funkcjami.

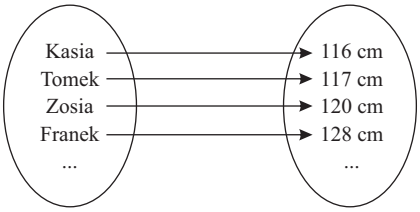
O funkcji

Funkcją określoną w zbiorze A o wartościach należących do zbioru B (lub: funkcją ze zbioru A w zbiór B) nazywamy dowolną relację ρ z A w B spełniającą następujące warunki:

$$1^\circ\ \forall_{a\in A}\ \exists_{b\in B}(a, b) \in \rho$$
$$2^\circ\ \forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}\ \forall_{b'\in B}[(a, b) \in \rho \wedge (a, b') \in \rho] \Rightarrow b = b'$$

Przykłady

- Rozważmy dwa zbiory A i B. Niech A będzie zbiorem przedszkolaków Przedszkola Publicznego nr 53 w Rzeszowie, zaś B to wzrost przedszkolaków tegoż przedszkola wyrażony w centymetrach. Możemy zatem mówić o relacji opisanej następująco: *każdy przedszkolak ma swój wzrost wyrażony w centymetrach*. Poniższy graf ilustruje owo przyporządkowanie.



  Faktem jest, że każdy przedszkolak ma przypisany swój wzrost i żaden z nich nie ma przypisanych dwóch różnych wartości liczbowych wyrażonych w centymetrach. Możemy zatem wnioskować, że każdy element zbioru A został przyporządkowany elementowi ze zbioru B. Co więcej, każdy z nich ma przyporządkowaną jedną wartość liczbową. Zatem spełniony jest pierwszy warunek definicji, czyli dla każdego elementu ze zbioru A istnieje element w B, z którym tworzy on uporządkowaną parę należącą do relacji. I drugi, ponieważ każdy element z A tworzy dokładnie jedną parę uporządkowaną należącą do relacji.

- Niech A oznacza zbiór wszystkich studentów drugiego roku pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej wyższych uczelni w Polsce, a B będzie zbiorem pierwszych liter ich nazwisk. Relacja określona: *student drugiego roku pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej w Polsce ma pierwszą literę nazwiska* jest funkcją, bo każde nazwisko zaczyna się literą i jest ona tylko jedna.

- Niech A oznacza zbiór uczniów szkół podstawowych w Zielonej Górze, zaś B będzie zbiorem numerów PESEL. Relacja określona następująco: *uczeń szkoły podstawowej w Zielonej Górze posiada numer PESEL* może nie być funkcją. Taka sytuacja zdarzy się wtedy, gdy wśród uczniów tych szkół jest obcokrajowiec nieposiadający takiego numeru.

Relacje możemy przedstawiać za pomocą opisu słownego, za pomocą grafu, równania, wykresu, zbioru par uporządkowanych czy tabeli. Tak też jest w przypadku funkcji. Przyjrzyjmy się teraz poniższym przykładom relacji zaprezentowanym w tabelach i rozstrzygnijmy, czy są funkcjami.

Przykład

- Niech dane będzie przyporządkowanie ze zbioru A w zbiór B. Elementami zbioru A są a_1, a_2, a_3 dla ρ_1 i ρ_2 oraz a_1, a_2 dla ρ_3, natomiast do zbioru B należą b_1, b_2, b_3 w przypadku ρ_1 i ρ_2 oraz b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 dla relacji ρ_3. Przyjrzyjmy się tabelkom i rozstrzygnijmy, która z nich przedstawia funkcję (przypomnienie: znak + wskazuje pary uporządkowane należące do relacji).

ρ_1	b_1	b_2	b_3
a_1		+	
a_2	+		
a_3			

ρ_2	b_1	b_2	b_3
a_1	+		
a_2		+	
a_3			+

ρ_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	+				+
a_2			+		

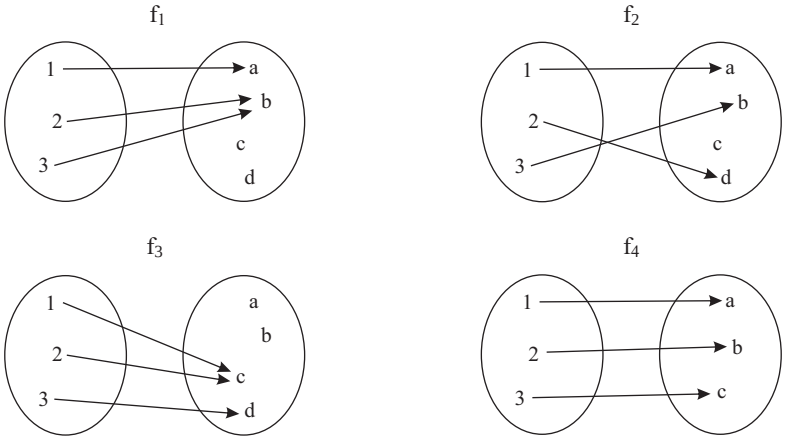
Wśród relacji ρ_1, ρ_2, ρ_3 tylko ρ_2 jest funkcją. Relacja ρ_1 nie spełnia pierwszego warunku definicji funkcji, ponieważ element a_3 nie jest w relacji z żadnym elementem zbioru B. Relacja ρ_3 również nie jest funkcją, bo $(a_1, b_1) \in \rho \wedge (a_1, b_5) \in \rho$, ale $b_1 \neq b_5$.

Funkcje oznaczamy małymi literami, np. f, g, h. Określoną na X i odwzorowaną w zbiór Y zapisujemy:

$$f\colon X \to Y \quad \text{lub} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{lub} \quad y = f(x) \ \text{ dla } \ x \in X \text{ i } y \in Y$$

Przykład

- Funkcje ze zbioru X w zbiór Y przedstawiono za pomocą grafów strzałkowych. Są one na tyle nieskomplikowane, że nie musimy dowodzić, że spełniają warunki podane w definicji. Przyjrzyjmy się zbiorom X i Y oraz zilustrowanym przyporządkowaniom.



Zbiór X, na którym określono funkcję, nazywamy *dziedziną funkcji* i oznaczamy D_f. Elementy zbioru X nazywamy *argumentami funkcji*. W każdym z naszych przykładów funkcji $D_f = \{1, 2, 3\}$, a argumentami są 1, 2, i 3.

Zbiór Y, w który odwzorowano zbiór X, nazywamy *przeciwdziedziną funkcji* i oznaczamy D_f^{-1}. Jeżeli w przeciwdziedzinie funkcji każdy element został przyporządkowany pewnemu argumentowi funkcji, to Y nazywamy *zbiorem wartości funkcji*, a jego elementy *wartościami funkcji*. Dla funkcji f_1, f_2, f_3 przeciwdziedzina zawiera elementy, które nie zostały przyporządkowane żadnym argumentom. Te elementy nie są wartościami funkcji, a jedynie należą do przeciwdziedziny funkcji. Gdy w przeciwdziedzinie istnieje co najmniej jeden element, który nie został przyporządkowany żadnemu argumentowi, mówimy, że funkcja jest przyporządkowaniem w zbiór Y. W przeciwnym wypadku mówimy, że funkcja jest odwzorowana na zbiór Y. W naszych przykładach f_1, f_2, f_3 będą funkcjami w Y, zaś f_4 będzie funkcją na Y. Dla funkcji f_4 zbiór wartości i przeciwdziedzina są równe, co możemy zapisać $Y = D_f^{-1}$. Przeciwdziedziną dla f_1, f_2, f_3 jest $D_f^{-1} = \{a, b, c, d\}$, zaś zbiorami wartości:

$$\text{dla } f_1 \text{ mamy } Y = \{a, b\} \text{ i } Y \subset D_f^{-1}$$

$$\text{dla } f_2 \text{ mamy } Y = \{a, b, d\} \text{ i } Y \subset D_f^{-1}$$

$$\text{dla } f_3 \text{ mamy } Y = \{c, d\} \text{ i } Y \subset D_f^{-1}$$

Chcąc podać wartości funkcji dla wybranych argumentów, korzystamy z zapisu: $f_1(1) = a$ i czytamy *wartość funkcji f_1 dla argumentu 1 wynosi a*.

Własności funkcji

Do tej pory po każdym wprowadzonym pojęciu staraliśmy się określić jego własności. Tak też będzie i w tym wypadku. Rozważmy ponownie funkcje f_2 i f_4 jako przykłady odwzorowań, które w matematyce nazywamy niezwykle istotnymi. A oto ich definicje.

O funkcji różnowartościowej

Funkcję ze zbioru X w zbiór Y nazywamy odwzorowaniem różnowartościowym (iniekcją) wtedy i tylko wtedy, gdy dwóm różnym argumentom odpowiadają dwie różne wartości funkcji i zapisujemy symbolicznie:

$$\forall_{x_1 \in X} \forall_{x_2 \in X} (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Przykładem iniekcji są funkcje f_2 i f_4. W tych odwzorowaniach każdemu argumentowi przypisano inną wartość.

O funkcji „na”

Funkcję ze zbioru X w zbiór Y nazywamy suriekcją wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element przeciwdziedziny został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi.

Przykładem suriekcji jest f_4. Tu każda wartość funkcji została przypisana do co najmniej jednego argumentu. Suriekcja jest funkcją na zbiór Y.

O odwzorowaniu wzajemnie jednoznacznym

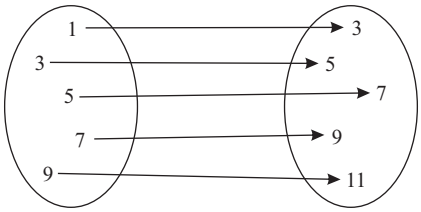
Funkcję ze zbioru X w zbiór Y nazywamy odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym (bijekcją) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element przeciwdziedziny został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi oraz gdy dwóm różnym argumentom odpowiadają dwie różne wartości funkcji.

Przykładem bijekcji jest f_4, bo każdemu argumentowi odpowiada inna wartość funkcji oraz każdy element przeciwdziedziny został przyporządkowany

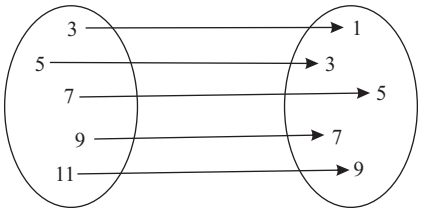
pewnemu argumentowi. Nietrudno zauważyć, że każda funkcja, która jest iniekcją i suriekcją, jest również bijekcją.

Funkcja odwrotna

Rozważmy teraz funkcję f: X → Y taką, że f jest bijekcją. Sprawdźmy, czy odwracając to odwzorowanie, również otrzymamy funkcję. Niech X = {1, 3, 5, 7, 9}, a f będzie odwzorowaniem, które każdej liczbie zbioru X przyporządkowuje liczbę o 2 większą. Wtedy Y = {3, 5, 7, 9, 11}. Na grafie prezentuje się to w następujący sposób:



Odwróćmy teraz odwzorowanie, czyli odwzorujemy z Y w X (graf poniżej).



Odwzorowanie odwrotne do wyjściowego również spełnia warunki funkcji. Dla każdego elementu ze zbioru Y istnieje element w X, z którym tworzy parę uporządkowaną należącą do relacji oraz każdy element zbioru Y ma przyporządkowany dokładnie jeden element ze zbioru X, co potwierdza spełnienie drugiego warunku zapisanego w definicji. Na tej podstawie możemy wnioskować, że odwzorowanie nazywane w matematyce odwrotnym jest również funkcją. Funkcję taką będziemy nazywali *funkcją odwrotną* i oznaczali ją f^{-1}. Nietrudno się domyślić, że dziedzina funkcji f będzie zbiorem wartości funkcji f^{-1}, a zbiór wartości f zbiorem argumentów f^{-1}, czyli dziedziną. Pozostało nam tylko określić, w jaki sposób funkcja odwrotna przekształca Y w X. Wiemy, że f każdemu elementowi

zbioru X przyporządkowywała liczbę o 2 większą, zatem f^{-1} każdemu elementowi zbioru Y będzie przyporządkowywała element o 2 mniejszy. Nasze funkcje możemy opisać wzorem:

$$f(x) = x + 2 \text{ dla każdego } x \in X$$

$$f^{-1}(y) = y - 2 \text{ dla każdego } y \in Y$$

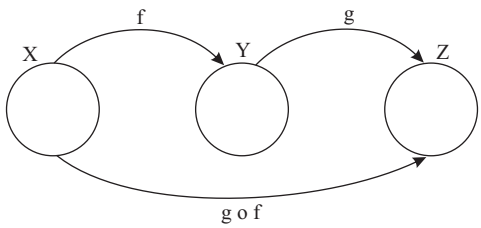
Teraz wystarczy przemianować funkcję odwrotną i otrzymujemy: $f^{-1}(x) = x - 2$. Dziedziną naszej funkcji odwrotnej jest zbiór Y, a zbiorem wartości zbiór X.

Myślę, że czytelnicy zwrócili uwagę na założenie przyjęte na początku poszukiwań funkcji odwrotnej. Ustaliliśmy, że rozważana funkcja f jest bijekcją. Dlaczego? Poszukując odpowiedzi na to pytanie, rozpatrzymy sytuację, w której funkcja nie jest iniekcją lub nie jest suriekcją.

Przyjmijmy na wstępie, że nasza funkcja nie jest suriekcją. Znaczy to dokładnie tyle, że w zbiorze, w który odwzorowano funkcję, znajdują się elementy niebędące jej wartościami. W takiej sytuacji nie możemy wyznaczyć funkcji odwrotnej, bo nie będzie spełniony pierwszy warunek zapisany w definicji. Gdybyśmy teraz przyjęli, że nasza funkcja nie jest iniekcją, to wyznaczając odwzorowanie odwrotne, uzyskalibyśmy takie, które nie spełnia drugiego warunku definicji.

Złożenie funkcji

Rozważmy teraz trzy zbiory X, Y, Z, na których określono dwie funkcje. Pierwsza z nich funkcja $f: X \to Y$, a druga $g: Y \to Z$. Weźmy dowolny element x ze zbioru X. Funkcja f przyporządkowuje mu pewien element z Y taki, że $y = f(x)$. Następnie elementowi y funkcja g przyporządkuje pewien element z Z taki, że $z = g(y)$. Do ostatniej równości w miejsce y podstawiamy f(x) i otrzymujemy $z = g(f(x))$.



Przyporządkowanie, które otrzymaliśmy, nazywamy *złożeniem* (lub *superpozycją*) *funkcji* f i g. Oznaczamy je g o f, czyli

$$g \circ f\colon X \to Z$$

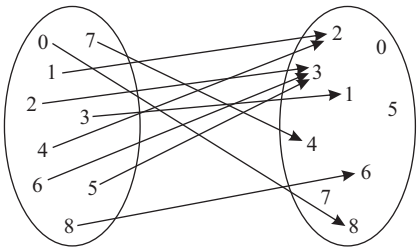
Przykład

- Rozważmy dwie funkcje $f(x) = x + 3$ oraz $g(x) = 2x$ określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Złożeniem funkcji f z g będzie $g \circ f = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (x + 3) = 2x + 6$, natomiast złożeniem funkcji g z f będzie $f \circ g = f(g(x)) = g(x) + 3 = 2x + 3$. Uzyskaliśmy inne funkcje. Wniosek jest taki, że złożenie funkcji nie jest przemienne.

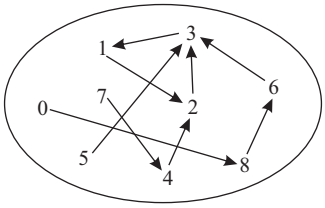
O niewspomnianych dotychczas sposobach przedstawiania funkcji

Funkcje, a przede wszystkich ich graficzna prezentacja, powinny się nam wszystkim kojarzyć z wykresami. Niektóre z zadań, którymi doświadczano nas w szkole, zawierały polecenie: *narysuj wykres funkcji.* Powróćmy więc przez chwilę do wykresów tych znanych ze szkoły i tych rzadko występujących w podręcznikach szkolnych.

Wspominany niejednokrotnie graf strzałkowy jest również prezentacją graficzną funkcji. Uczyńmy go punktem startowym naszych rozważań i przyjmijmy poniższe przyporządkowanie. Analizując graf, przekonujemy się, że nasze przyporządkowanie jest funkcją (spełnione są warunki określone w definicji). Jednak nie jest ona ani suriekcją, ani iniekcją, ponieważ w zbiorze, w którym zostało określone przyporządkowanie, możemy wyróżnić elementy nieprzypisane do żadnego argumentu, np. 5. Ponadto elementowi 3 przyporządkowano liczby 2, 4 i 5, zatem funkcja nie jest różnowartościowa.

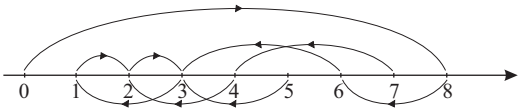


Zwróćmy uwagę na elementy zbiorów. Okazuje się, że podana funkcja jest określona na zbiorze {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} i została odwzorowana w zbiór {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, czyli zbiory są równe. Możemy zatem przedstawić funkcję w formie innego grafu, który równie często pojawia się w matematyce.

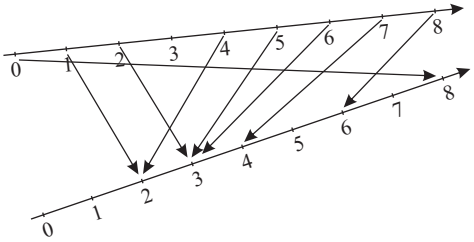


Wiemy ze szkoły, że liczby możemy przedstawić na osi liczbowej lub osiach liczbowych. Spróbujmy zatem pokazać, jak może wyglądać prezentacja graficzna naszej funkcji za ich pomocą.

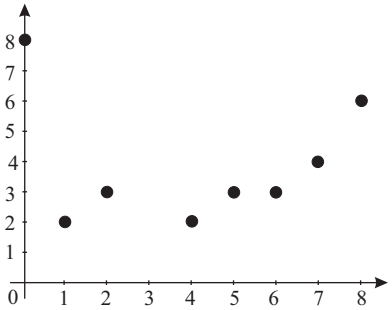
Funkcja przedstawiona za pomocą osi liczbowej



Funkcja przedstawiona
za pomocą dwóch osi liczbowych



Funkcja w prostokątnym układzie
współrzędnych



Każdy z przedstawionych rysunków możemy nazwać prezentacją graficzną funkcji, ale tylko ostatni z nich jest wykresem funkcji. Wykres funkcji to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny takich, że każdemu z nich odpowiada uporządkowana para (x, y) którą nazywamy *współrzędnymi punktu*. Pierwsza współrzędna punktu odpowiada poprzednikowi pary uporządkowanej, a druga jej następnikowi.

Funkcja we wczesnej edukacji

Funkcja pojawia się już na pierwszym etapie edukacyjnym, chociaż z samym pojęciem uczniowie spotykają się dużo później. W zeszytach ćwiczeń i podręcznikach przygotowanych dla najmłodszych uczniów odnajdziemy tzw. tabelki funkcyjne oraz grafy, których poprawne uzupełnienie polega na wskazaniu wielkości liczbowej powstałej w wyniku przyporządkowania określonego przez strzałkę. Poniżej przedstawię kilka propozycji, które zilustrują przykłady funkcji pojawiające się we wczesnej edukacji.

- Przykłady tabelek funkcyjnych.

+3

5	3	7	2	4	3

Na początek przykład bardzo prostej tabelki. Zadaniem uczniów jest uzupełnienie pustych pól odpowiednią wartością liczbową. W naszym przykładzie każdej liczbie pierwszego wiersza przypisuje liczbę o 3 większą.

+5

0	4	7	6			
				8	9	6

–5

W powyższej tabelce mamy przykład łączący funkcję z funkcją odwrotną. Do uzyskania poprawnych wyników w drugim wierszu tabeli należy każdej liczbie z pierwszego wiersza przyporządkować liczbę o 5 większą. Natomiast aby uzupełnić wiersz pierwszy, musimy od każdego elementu wpisanego w wierszu drugim odjąć 5. Zwróćmy uwagę, że kierunki strzałek wyznaczają działania odwrotne.

+1 +4 –3

2	4	6				9
6	8		8			13
3	5			2	7	10

–4 –1 +3

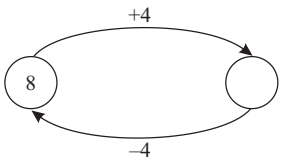
Ostatnia z przykładowych tabelek funkcyjnych jest rozbudowana i łączy w sobie funkcję odwrotną oraz złożenie funkcji. I tak, aby uzupełnić kolumnę trzecią tabeli, należy w pierwszej kolejności znaleźć liczbę o 4 większą, by następnie odjąć od niej 3. Zatem każdej liczbie z pierwszego wiersza

przyporządkowujemy liczbę o 4 większą, a następnie przyporządkowujemy liczbę o 3 mniejszą. Jest to równoważne z przyporządkowaniem liczbie z pierwszego wiersza liczby o 1 większej w trzecim wierszu (co w tabelce zaznaczono zewnętrzną strzałką). Jest to nic innego jak złożenie funkcji. Do uzupełnienia elementów w pierwszym i drugim wierszu stosujemy funkcje odwrotne, tj. liczbie dwa z wiersza trzeciego przyporządkowujemy kolejno liczbę o 3 większą, a następnie liczbę o 4 mniejszą.

Podane przykłady tabelek odwołujących się do funkcji nie wykraczają poza treści matematyczne realizowane w klasie pierwszej. Co więcej, tabelki możemy stosować w starszych klasach, wystarczy dobrać trudniejsze przykłady. Tabelki funkcyjne równie dobrze sprawdzają się dla mnożenia i dzielenia, należy jednak uważać, aby wyniki ilorazów zawsze należały do zbioru liczb naturalnych.

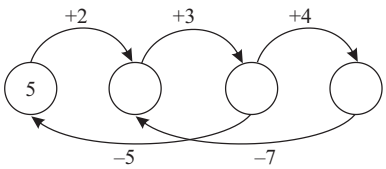
Nie jest to jedyny przykład, w którym możemy wskazać obecność funkcji. Innym przykładem są grafy, które najczęściej wprowadza się w edukacji matematycznej do zilustrowania działania i działania do niego odwrotnego oraz jako pomoc przy rozwiązywaniu zadań tekstowych. W grafach strzałki również symbolizują funkcje.

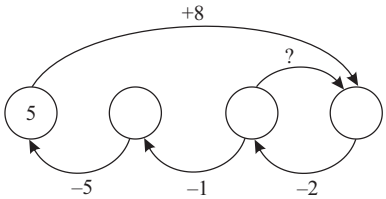
× Przykłady grafów.



Graf jako przykład funkcji i funkcji odwrotnej. Liczbie 8 przyporządkowano liczbę o 4 większą i odwrotnie, pewnej liczbie przyporządkowano liczbę o 4 mniejszą. W wyniku przekształcenia otrzymano 8.

Poniższe grafy są bardziej rozbudowane. Tu uczniowie muszą wykonać wiele działań. Graf na rysunku z lewej strony daje możliwość porównania funkcji, która jest odwrotna do złożenia dwóch funkcji. Natomiast na grafie po prawej uczeń wyznacza funkcję odwrotną do podanej. Oczywiście, tak jak w wypadku tabelek funkcyjnych, tu również możemy wykorzystać mnożenie i dzielenie.

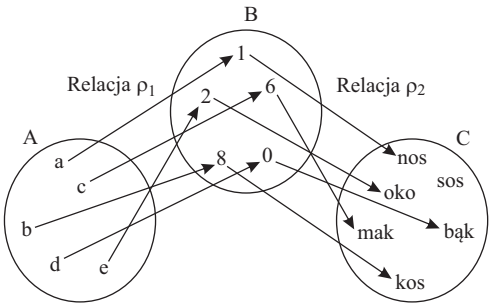




Jest jeszcze jedno ważne miejsce, w którym wykorzystujemy funkcję we wczesnej edukacji. Z funkcją uczniowie spotkają się podczas porównywania liczebności zbiorów, ale o tym w następnym podrozdziale.

3.4. Relacja równoliczności zbiorów

Na poniższych grafach zaprezentowano relacje między trzema dowolnie wybranymi zbiorami skończonymi A, B, C. Relacja ρ_1 jest określona w zbiorach A i B, a relacja ρ_2 w B i C. Analizując przyporządkowanie zilustrowane strzałkami, dostrzegamy, że ρ_1 i ρ_2 są funkcjami, przy czym tylko jedna z nich, tj. relacja ρ_1, jest bijekcją. Z faktu, że między zbiorami A i B określono bijekcję, wynika, że zbiory te muszą mieć po tyle samo elementów. Inną sytuację opisuje relacja ρ_2. Okazuje się, że w zbiorze C znajduje się element, który nie został przyporządkowany żadnemu z B. Wnioskujemy stąd, że B i C nie mają tej samej liczby elementów.



Zbiory skończone, które mają taką samą liczbę elementów, nazywamy *zbiorami równolicznymi*. Na podstawie dokonanej analizy wnioskujemy, że A i B są równoliczne, a B i C nie. Decyzja o równoliczności zbiorów w naszym przykładzie nie wymagała prowadzenia skomplikowanych rozumowań matematycznych. Po pierwsze były to zbiory skończone, a po drugie każdy z nich zawierał niewielką liczbę elementów. Jednak trudność pojawia się przy zbiorach nieskończonych. Rozszerzmy więc pojęcie równoliczności zbiorów na zbiory nieskończone.

O zbiorach równolicznych

Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Zbiory A i B nazywamy równolicznymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja z A w B. Zbiory równoliczne oznaczamy $A \equiv B$.

Podana definicja warunkuje istnienie równoliczności od istnienia bijekcji, co zresztą potwierdza nasz przykład na zbiorach skończonych.

Pojęcie równoliczności jest jednym z tych pojęć matematycznych, któremu we wczesnej edukacji poświęcamy wiele czasu. Wykorzystujemy je do porównywania liczebności zbiorów, szczególnie wtedy, gdy liczba elementów zbioru przekracza zakres liczbowy dziecka. Wtedy właśnie jedynym dostępnym dziecku sposobem uporania się z zadaniem jest wyznaczenie bijekcji między zbiorami. Dziecko zwyczajnie buduje pary elementów, zestawiając kolejno element z pierwszego zbioru z elementem drugiego zbioru. Jeśli do ułożenia par wykorzysta wszystkie elementy z obydwu zbiorów, to znaczy, że zbiory są równoliczne. Jeśli w jednym z nich zostanie co najmniej jeden element bez pary, to znaczy, że ten zbiór ma więcej elementów. Podczas porównywania liczebności zbiorów przez uczniów należy zwrócić uwagę na jeszcze jeden, często pojawiający się błąd. Dotyczy on porównywania liczebności zbiorów, w których elementy różnią się jakościowo, np. w jednym zbiorze umieścimy małe piłeczki, zaś w drugim duże piłki. Dziecięce pomyłki pojawiające się w takich sytuacjach najczęściej świadczą o zbyt małej liczbie doświadczeń z przeliczaniem różnych obiektów.

Własność relacji równoliczności

Powróćmy ponownie do relacji równoliczności, a dokładniej do jej własności. Relacja równoliczności jest relacją równoważności, czyli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. A dokładniej:

(1) Każdy zbiór jest równoliczny sam ze sobą, czyli dla każdego elementu z A istnieje bijekcja z A w A. Przykładem takiej relacji jest funkcja, która każdemu elementowi zbioru A przyporządkowuje ten sam element. Taką funkcję nazywamy *tożsamościową* lub *identycznościową* (Rasiowa, 2003, s. 45).

(2) Jeżeli zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B, to zbiór B jest równoliczny z A. Z założenia o równoliczności zbiorów A i B wynika, że istnieje bijekcja ze zbioru A w B. Skoro istnieje bijekcja, to z definicji funkcji odwrotnej wiemy, że istnieje bijekcja ze zbioru B w A. To zaś potwierdza, że $B \equiv A$.

(3) Jeżeli zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B i zbiór B jest równoliczny ze zbiorem C, to zbiór A jest równoliczny z C. Z założenia o równoliczności zbiorów A i B i równoliczności zbiorów B i C wynika, że istnieje bijekcja ze zbioru A w B oraz bijekcja ze zbioru B w C. Po złożeniu tych dwóch przyporządkowań (patrz złożenie funkcji) otrzymujemy przyporządkowanie ze zbioru A w C, które również jest bijekcją. To zaś potwierdza, że $A \equiv C$.

Przyszłego nauczyciela edukacji wczesnoszkolnej najbardziej powinna zainteresować własność (3). To ona pozwala uczniom wnioskować, że skoro w koszyku pierwszym jest tyle samo piłek, co w koszyku drugim, a w koszyku drugim tyle samo, co w trzecim, to w koszyku pierwszym jest tyle samo piłek, co w trzecim. Jest to bardzo ważna własność, ale niestety dla niektórych uczniów nie taka oczywista.

Zastanawiam się, czy czytelnicy zwrócili uwagę na jeden ważny fakt. Do tej pory intuicyjnie posługiwaliśmy się pojęciami „zbiór skończony" oraz „zbiór nieskończony" i myślę, że nikt nie miał większych problemów z ich rozróżnianiem. Mimo że w edukacji wczesnoszkolnej ograniczamy się do zbiorów skończonych poza zbiorem liczb naturalnych, to warto dopełnić formalności.

O zbiorach skończonych i nieskończonych

Zbiór jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny z co najmniej jednym swoim podzbiorem właściwym, natomiast jest skończony, gdy nie jest równoliczny z żadnym swoim podzbiorem właściwym.

3.5. Zadania – przyporządkowywanie zbiorów

Zadanie 3.1

Wypisz wszystkie uporządkowane pary należące do $A \times B$ dla $A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ i $B = \{W, D, K, A\}$.

Zadanie 3.2

Niech dane będą zbiory $A = \{0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$.

a) zilustruj zbiór $A \times B$ za pomocą grafu,
b) zaznacz pary należące do $A \times B$ w prostokątnym układzie współrzędnych,
c) zaproponuj tabelkę dla iloczynu $A \times B$.

Zadanie 3.3

Uzupełnij poniższe zapisy:

a) $\{a\} \times \{a\} =$
b) $\emptyset \times \{a\} =$
c) $\{\emptyset\} \times \{a\} =$

Zadanie 3.4

Dla dowolnie wybranych zbiorów trójelementowych pokaż, że $A \times B \neq B \times A$.

Zadanie 3.5

Dla dowolnie wybranych zbiorów dwuelementowych pokaż, że zachodzi

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Zadanie 3.6

Przyjmując, że $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{4, 5\}$, wypisz pary należące do zbiorów:

a) $A \times B$
b) $(A \cup B) \times C$
c) $(A \cap B) \times C$
d) $(A \times B) \times C$
e) $(B \cup C) \times A$
f) $(A \times B) \cup (A \times C)$

Zadanie 3.7

Zilustruj poniższe własności iloczynu kartezjańskiego za pomocą tabelek. Przyjmij, że $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ oraz $C = \{a, b, c\}$.

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Zadanie 3.8

Ile różnych relacji dwuczłonowych możemy określić w zbiorze:

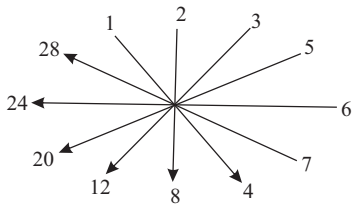
a) jednoelementowym,
b) dwuelementowym,
c) pięcioelementowym.

Zadanie 3.9

Niech dany będzie zbiór $A = \{2, 3, 4, 10\}$ i relacja $\rho \subset A \times A$. Narysuj graf strzałkowy i sporządź tabelkę relacji ρ, wiedząc, że $\rho = \{(x, y) \in A^2$: $x + y$ jest liczbą pierwszą$\}$.

Zadanie 3.10

Podaj opis słowny relacji oraz określ ją za pomocą wzoru.



Zadanie 3.11

Pewną relację ρ przedstawiono w postaci tabelki. Określ słownie tę relację, narysuj graf i podaj jej własności.

ρ	2	3	4	6	12
2	+				
3		+			
4	+		+		
6	+	+		+	
12	+	+	+	+	+

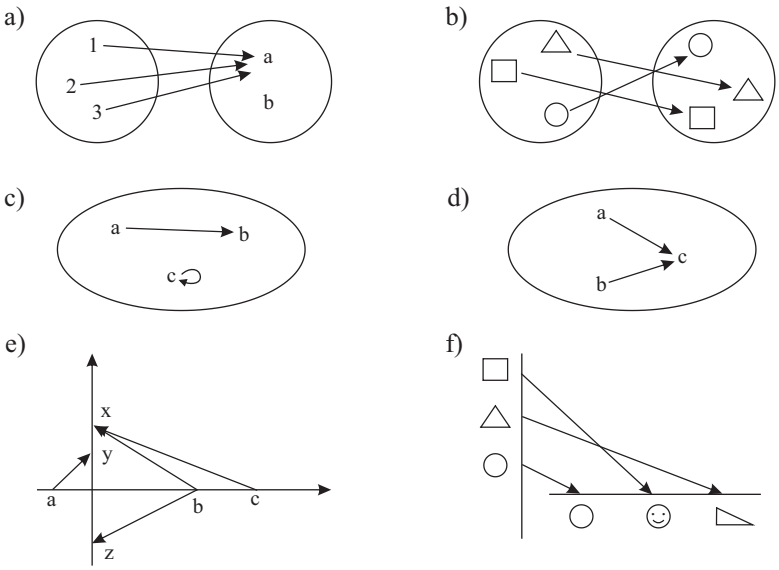
Zadanie 3.12

Mając do dyspozycji dwa zbiory X i Y, zaproponuj funkcję f: X → Y i spróbuj przedstawić ją za pomocą wzoru.

a) X = {0, 1, 2, 3, 4} Y = {2, 3, 4, 5, 6}
b) X = {0, 1, 2, 3, 4} Y = {0, 2, 4, 6, 8}
c) X = {1, 2, 3, 4, 5} Y = {1, 3, 5, 7, 9}

Zadanie 3.13

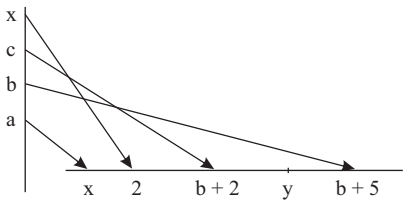
Który z grafów przedstawia funkcję? Dla każdej zidentyfikowanej funkcji wyznacz dziedzinę i zbiór wartości.



Zadanie 3.14

Rysunek przedstawia funkcję g. Na jego podstawie, o ile to możliwe, uzupełnij następujące zapisy:

g(a) = … g(b) = …
g(…) = b + 2 D = …
D^{-1} = … Y = …



Zadanie 3.15

Funkcja przekształca zbiór A na zbiór B. Wypisz wszystkie elementy zbioru A, jeżeli B = {1, 3, 5, 7, 9, 11} i f(a) = 2a – 1.

Zadanie 3.16

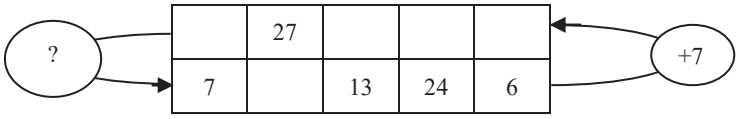
Przedstaw za pomocą grafu strzałkowego przykład funkcji, która jest tylko iniekcją oraz takiej, która jest tylko suriekcją. Dla każdego podanego przykładu określ dziedzinę i zbiór wartości.

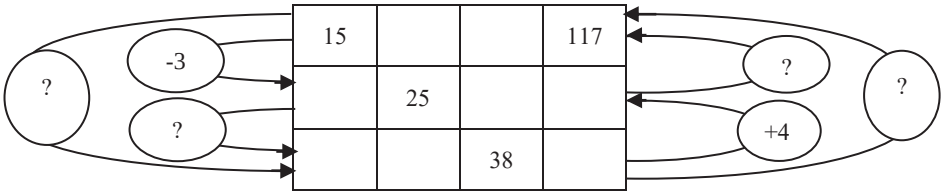
Zadanie 3.17

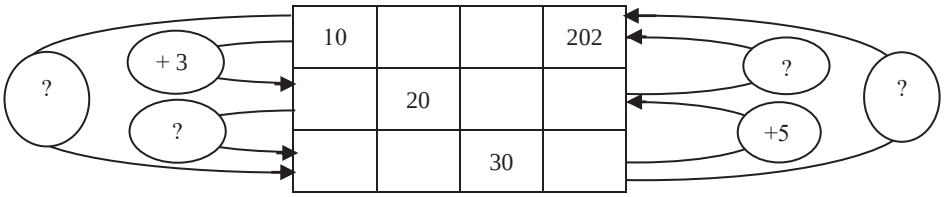
Dla zbiorów X = {a, b, c} i Y = {1, 2, 3, 4, 5} określ funkcję, która jest suriekcją i nie jest bijekcją. Przedstaw ją w formie tabeli i grafu strzałkowego.

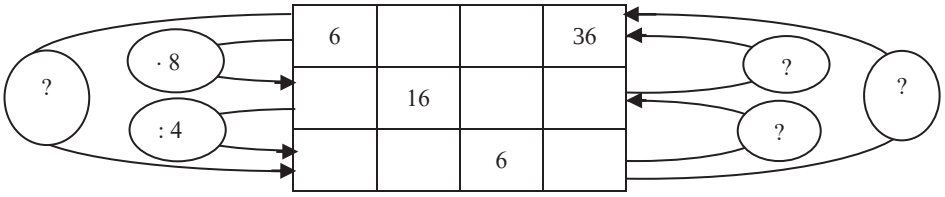
Zadanie 3.18

W poniższych tabelkach strzałki określają sposób przyporządkowania liczb w kolejnych wierszach. Uzupełnij tabelki według określonych przyporządkowań oraz określ przyporządkowanie w miejscach, które opisano znakami zapytania.



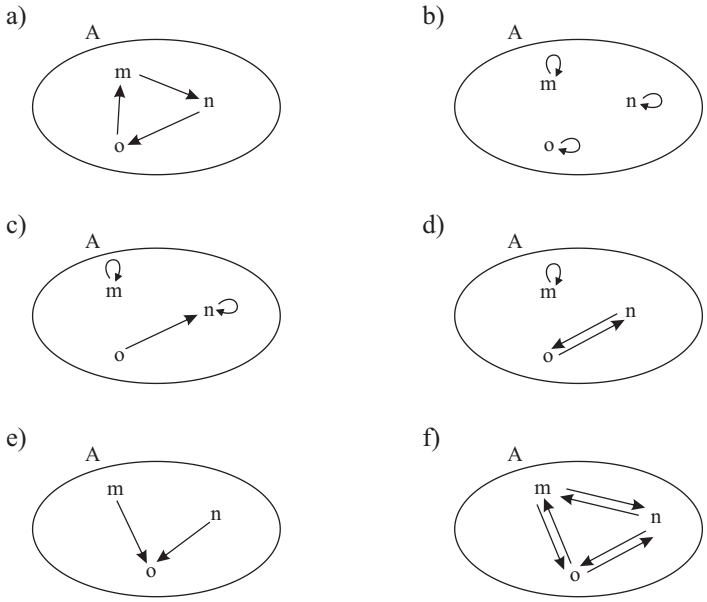






Zadanie 3.19

Na poniższych grafach przedstawiono relacje określone w A = {m, n, o}. Sporządź tabelkę dla każdej z tych relacji oraz określ ich własności.



Zadanie 3.20

Wyznacz funkcję odwrotną do podanej funkcji f. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji odwrotnej.

a) $f(n) = n + 5, n \in \mathbb{N}$

b) $f(n) = 4n, n \in \mathbb{N}$

Zadanie 3.21

Pewną funkcję f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ opisano wzorem f(n) = 6n + 9. Podaj przykłady funkcji g(n) i h(n) takich, że funkcja f(n) jest ich złożeniem.

Zadanie 3.22

Uzasadnij, że zbiory równoliczne nie muszą być równe.

Zadanie 3.23

Uzasadnij, że jeżeli skończone zbiory są równe, to są równoliczne.

Zadanie 3.24

Podaj przykład relacji jednocześnie zwrotnej i przechodniej. Uzasadnij podane własności relacji.

Zadanie 3.25

Podaj przykład relacji symetrycznej oraz relacji przechodniej.

4. Liczby naturalne

Bóg stworzył liczby naturalne, wszystko inne jest dziełem człowieka – to słowa jednego z wielkich matematyków Leopolda Kroneckera[1], które w szczególny sposób wyróżniają liczby naturalne spośród innych zbiorów liczbowych. Teraz właśnie skoncentrujemy się na zbiorze liczb naturalnych, czyli nieskończonym zbiorze liczbowym. Pamiętacie, jak pisałam, że matematyków interesują takie właśnie zbiory. My również się nim zainteresujmy z dwóch powodów. Pierwszy to wszechobecność tych liczb potwierdzona również na kartach historii (Juszkiewicz, 1977, s. 54), a drugi wiąże się z przyszłą pracą zawodową, bo to właśnie od nich zaczynamy szkolną przygodę z matematyką (Dz.U. z 2017 r., poz. 356).

Liczbami ludzie posługują się od wieków. Jednak w pierwotnym znaczeniu liczbę postrzegano jako wspólną cechę zbiorów skończonych o takiej samej liczbie elementów. To właśnie wskazanie tej cechy dla zbiorów jednoelementowych, dwuelementowych itd. przyczyniło się powstania liczb naturalnych, które długo funkcjonowały w naszej rzeczywistości w taki właśnie sposób. Wszystko, co wtedy o nich powiedziano, opierało się na ich intuicyjnym pojęciu (Waliszewski, 1989, s. 121). Wielu matematyków operowało nimi, przyjmując za podstawę jedynie rozumienie intuicyjne. Mimo że uznaję intuicję jako podstawę odkryć matematycznych, to bywa ona zawodna. Przykładem może być *paradoks Hilberta*[2] (zwany też *paradoksem Grand Hotelu*), który posłużył do zilustrowania trudności w intuicyjnym rozumieniu „ilości" elementów zbioru nieskończonego (Sporer, 1987, s. 113). W matematyce uściśleniem budowanych na intuicji teorii matematycznych są teorie aksjomatyczne. Budując teorię aksjomatyczną, przyjmujemy pewne pojęcia, a ich własności opisujemy aksjomatami. Aksjomaty na szczęście

---

[1] Leopold Kronecker (1823–1891) – niemiecki matematyk który zajmował się teorią liczb, algebrą i analizą zespoloną.

[2] David Hilbert (1862–1943) – jeden z najbardziej wpływowych niemieckich matematyków XIX i XX w. Zajmował się m.in. algebraiczną teorią liczb, rachunkiem wariacyjnym oraz podstawami geometrii i logiki matematycznej. *Paradoks Hilberta* przedstawiono w ostatnim rozdziale książki.

nie wymagają dowodów. Przyjęte w danej teorii pojęcia nazywamy *pojęciami pierwotnymi*, a te z kolei nie wymagają definicji. Służą do definiowania innych pojęć, którymi – tak jak pierwotnymi – posługujemy się w obrębie danej teorii. Uzupełnieniem teorii są twierdzenia. Formułujemy je na postawie aksjomatów, ale te niestety musimy udowodnić. Co więcej, wszystkie własności, których nie opisano aksjomatami, również należy udowodnić. Tak też stało się z liczbami naturalnymi. Pod koniec XIX wieku, a dokładniej w 1891 roku, włoski matematyk Giuseppe Peano zbudował aksjomatyczny system arytmetyki liczb naturalnych (Waliszewski, 1989, s. 121)[3], do którego powrócimy w dalszej części rozdziału.

O liczbach naturalnych pisałam w podrozdziale przedstawiającym szkolne przykłady nieskończonych zbiorów liczbowych. Ustaliśmy, że liczba naturalna jest elementem zbioru:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2022, 2023, 2024, \ldots, 100\,000, 1\,000\,001, 1\,000\,002, \ldots\},$$

a zbiór oznaczamy literą $\mathbb{N}$. I tak, jak nie definiowaliśmy pojęcia *zbiór*, tak też nie definiujemy pojęcia *liczba naturalna*. Uznajemy je za pojęcie pierwotne. Ponadto bez dowodu przyjmujemy poniższe aksjomaty równości:

(1) Każda liczba naturalna jest równa samej sobie, czyli

$$\forall_{x\in\mathbb{N}}\ x = x \quad \textit{aksjomat zwrotności.}$$

(2) Jeśli pierwsza liczba naturalna jest równa drugiej liczbie naturalnej, to druga jest równa pierwszej, czyli

$$\forall_{x,y\in\mathbb{N}}\ (x = y \Rightarrow y = x) \quad \textit{aksjomat symetryczności.}$$

(3) Jeśli pierwsza liczba naturalna jest równa drugiej i druga liczba naturalna jest równa trzeciej, to pierwsza jest równa trzeciej liczbie naturalnej, czyli

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{N}}\ [(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z] \quad \textit{aksjomat przechodniości.}$$

(4) Jeśli liczba naturalna jest równa innej liczbie, to ta liczba również musi być naturalna, czyli

$$\forall_{x,y}\ [(x \in \mathbb{N} \wedge x = y) \Rightarrow y \in \mathbb{N}] \quad \textit{aksjomat domknięcia.}$$

Zwróćmy uwagę, że na podstawie aksjomatów (1), (2) i (3) relacja określona w $\mathbb{N}$ będzie relacją równoważności. Ponadto w trzech pierwszych aksjomatach

---

[3] Oczywiście nie jest to jedyny sposób definiowania liczb. Liczby możemy jeszcze definiować poprzez stworzenie konstrukcji albo poprzez wydzielenie podzbioru spełniającego warunek z oddzielnie zdefiniowanego nadzbioru.

przyjęliśmy, że x, y, z są liczbami naturalnymi. Brak tego założenia powodowałby wiele problemów, dlatego też przyjęliśmy aksjomat (4), który gwarantuje nam, że rozważane liczby są liczbami naturalnymi. Powyższe aksjomaty są często pomijane, bo matematycy uznają je za pewnik. Potraktujmy zatem aksjomaty równości jako dopełnienie aksjomatów G. Peano.

Pamiętając, że pożądaną cechą aksjomatów jest ich oszczędność i komplementarność, przyjęto istnienie zbioru $\mathbb{N}$ i co najmniej jednej liczby n należącej do $\mathbb{N}$ oraz określono *funkcję następnika* f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że $f(n) = n^*$.

Aksjomaty Peano

(5) Zero jest liczbą naturalną, czyli $0 \in \mathbb{N}$.
W alternatywnych wersjach aksjomatów Peano przyjmuje się postać $1 \in \mathbb{N}$. Wówczas zbiór liczb naturalnych zaczyna się jedynką. My już wcześniej przyjęliśmy, że zero jest liczbą naturalną i konsekwentnie przy tym trwamy.

(6) Jeśli n należy do zbioru $\mathbb{N}$, to wartość funkcji f dla n również należy do tego zbioru, czyli jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $f(n) = n^* \in \mathbb{N}$.
Aksjomat (6) wykorzystuje funkcję f do generowania kolejnych liczb należących do $\mathbb{N}$. W matematyce tę wygenerowaną liczbę nazywa się sekwensem (następnikiem) liczby n. Zatem w (6) dowiadujemy się, że funkcja f dowolnej liczbie z $\mathbb{N}$ przyporządkowuje jej sekwens, który również należy do $\mathbb{N}$. To jednak ciągle za mało, aby zbiór liczb naturalnych był poprawnie zdefiniowany.

(7) Dla każdej liczby n należącej do zbioru $\mathbb{N}$ funkcja f nie przyjmuje wartości 0, czyli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(n) \neq 0$.
Aksjomat (7) mówi, że sekwensem 0 nie może być zero, zatem istnieje inna liczba, która musi być sekwensem zera. Przyjmijmy, że będzie to liczba 1. W taki sposób nasz zbiór $\mathbb{N}$ składa się już z 0 i 1. Jednak my wiemy, że liczb naturalnych jest znacznie więcej.

(8) Dla każdej liczby n_1 i n_2, które należą do zbioru $\mathbb{N}$, jeśli $f(n_1) = f(n_2)$, to $n_1 = n_2$.
Aksjomat (8) głosi, że z równości sekwensów musi wynikać równość liczb w $\mathbb{N}$. Gdyby tak nie było, to otrzymalibyśmy f(0) = 1 oraz f(1) = 1. Zwróćmy uwagę na aksjomat (7). Mówi on, że 0 nie jest wartością tej funkcji, a dotychczas ustaliliśmy, że zbiór liczbowy $\mathbb{N}$ zawiera 0 i 1. I tak, skoro zbiór $\mathbb{N}$ zawiera 0, a jego sekwens określony przez funkcję następnika wynosi 1 = f(0), to sekwensem jego sekwensu f(f(0)) będzie 2 itd.

(9) Aksjomat indukcji. Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{N}$ mamy:

$$(0 \in A \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n \in A \Rightarrow f(n) \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Aksjomat (9) przekonuje nas, że skoro 0 należy do zbioru A i sekwens dowolnej liczby naturalnej należy do A, to każda liczba należy do $\mathbb{N}$, bo założyliśmy, że A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ (Waliszewski, 1989, s. 122).

Na mocy przyjętych pojęć pierwotnych oraz aksjomatów G. Peano zdefiniujemy dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb naturalnych.

Dodawanie liczb naturalnych

Z aksjomatu (6) wiemy, że dla dowolnej liczby n ze zbioru liczb naturalnych istnieje dokładnie jedna liczba n^*, która jest jej sekwensem i również należy do zbioru liczb naturalnych. Ponadto na mocy aksjomatu (5) wiemy, że 0 jest liczbą naturalną. Dodawanie zdefiniujemy w następujący sposób:

$$1^\circ\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ n + 0 = n$$

$$2^\circ\ \forall_{n,m\in\mathbb{N}}\ n + f(m) = f(n + m)$$

Zauważmy, że tak zdefiniowana funkcja może wygenerować kolejne sumy. Na przykład:

$$1 + 1 = 1 + f(0) = f(1 + 0) = f(1) = 2,$$

i dalej $$1 + 2 = 1 + f(1) = f(1 + 1) = f(2) = 3, \ldots .$$

Kontynuując ten tok rozumowania, możemy wygenerować dodawanie, którym wszyscy posługujemy się na co dzień.

Mnożenie liczb naturalnych

Czytelnicy pewnie pamiętają ze szkoły sposób, w jaki wiązano dodawanie z mnożeniem. Uczono nas, że jest to prostsza forma zapisu dodawania tych samych liczb i zamiast pisać 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 wystarczy napisać 6 · 4. W taki też sposób uświadamiano nam związek dodawania z mnożeniem. Spróbujemy zatem wprowadzić mnożenie. Zdefiniujmy je w następujący sposób:

$$1^\circ\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ n \cdot 0 = 0$$

$$2^\circ\ \forall_{n,m\in\mathbb{N}}\ n \cdot f(m) = n + (n \cdot m)$$

Na podstawie powyższej definicji z łatwością możemy pokazać, że $n \cdot 1 = n$. Zaobserwujmy, że skoro $f(0) = 1$ to $n \cdot 1 = n \cdot f(0) = n + (n \cdot 0) = n + 0 = n$. Wyznaczmy teraz iloczyn liczb 2 i 3. Zauważmy, że $3 \cdot 2 = 3 \cdot f(1) = 3 + (3 \cdot 1) = 3 + 3 = 6$.

Dzięki wymienionym powyżej aksjomatom i definicjom w matematyce udowodniono wszystkie podstawowe twierdzenia arytmetyki. Zainteresowanych czytelników odsyłam do *Wstępu do matematyki współczesnej* (Rasiowa, 2003, s. 31–35), gdzie można znaleźć przykłady takich dowodów. My teraz skoncentrujemy się na własnościach działań, a wybraną wykażemy po wprowadzeniu liczby kardynalnej.

Działania arytmetyczne i ich wybrane własności

Wiemy już, że w zbiorze liczb naturalnych określamy działanie wewnętrzne, które nazywamy dodawaniem. Dodawanie dowolnym dwóm liczbom naturalnym a i b przyporządkowuje liczbę $a + b$ zwaną *sumą*, która również należy do zbioru liczb naturalnych. Liczby a i b nazywamy *składnikami sumy.*

Niech dane będą liczby naturalne a, b, c, d. Wśród własności dodawania wyróżniamy:

I. $a = c \wedge b = d \Rightarrow a + b = c + d$

II. $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ *prawo łączności dodawania*

III. $a + b = b + a$ *prawo przemienności dodawania*

IV. $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$ *prawo skreślania*

V. $a + 0 = a$

Własność (V), mimo że pojawiła się jako warunek 1° w aksjomatycznej definicji dodawania, została tu powielona z ważnego powodu. Określając własności działań, musimy zwrócić uwagę na element, który nie zmienia wyniku działania. Nazywamy go w matematyce *elementem neutralnym*. Liczba 0 jest właśnie takim elementem neutralnym dodawania, choć czytelnik mógł również słyszeć, że określa się go mianem *modułu dodawania.*

Odejmowanie jest kolejnym działaniem arytmetycznym, które możemy wykonywać na liczbach naturalnych. Odejmowanie dowolnym dwóm liczbom naturalnym a i b przyporządkowuje liczbę $a - b$ zwaną *różnicą*. Liczbę a nazywamy *odjemną*, zaś b *odjemnikiem.* Myślę, że czytelnik z łatwością zauważył, że nie przypisałam wyniku odejmowania do zbioru liczb naturalnych, przecież np. $12 - 7 = 5 \in N$. Niestety nie zawsze tak jest. Wystarczy zamienić odjemną

z odjemnikiem miejscami, aby okazało się, że w wyniku takiego odejmowania otrzymamy liczbę całkowitą. Otóż wynik odejmowania będzie należał do zbioru liczb naturalnych pod warunkiem, że odjemna będzie większa od odjemnika. Zatem w naszym opisie odejmowania należy dopisać dowolnym dwóm liczbom naturalnym takim, że $a > b$. To wystarczy, aby mieć pewność przynależności różnicy do zbioru liczb naturalnych.

Kolejnym działaniem, już zdefiniowanym za pomocą aksjomatów, jest mnożenie. Opiszmy je analogicznie do dodawania i odejmowania. Mnożenie dowolnym dwóm liczbom naturalnym a i b przyporządkowuje liczbę $a \cdot b$ zwaną *iloczynem*, która również należy do zbioru liczb naturalnych. Liczby a i b nazywamy *czynnikami* lub a *mnożną*, zaś b *mnożnikiem*. Ta druga nomenklatura ponownie zaczyna dominować w podręcznikach szkolnych. Przedstawmy teraz kilka własności mnożenia.

Niech dane będą liczby naturalne a, b, c, d. Wśród własności mnożenia wyróżniamy:

I. $a = c \wedge b = d \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$

II. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ *prawo łączności mnożenia*

III. $a \cdot b = b \cdot a$ *prawo przemienności mnożenia*

IV. $c \neq 0 \Rightarrow (a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b)$ *prawo skracania*

V. $a \cdot 1 = a$ *element neutralny mnożenia*

Pozostało nam dzielenie. Dzielenie nazywane działaniem odwrotnym do mnożenia dwóm liczbom naturalnym a i b przyporządkowuje liczbę $c = a : b$ zwaną *ilorazem* liczb a i b, taką, że $a = b \cdot c$. Liczbę a nazywamy *dzielną*, zaś b *dzielnikiem*. Niestety, tak jak w przypadku odejmowania, nie każdy uzyskany wynik będzie należał do zbioru liczb naturalnych. Chociażby dla $a = 12$ oraz $b = 5$ liczba c przyjmuje wartość $2{,}4 \notin \mathbb{N}$. Ponadto pozostaje jeszcze kwestia dzielenia przez 0. Matematycy twierdzą, że dzielenie przez 0 jest niewykonalne. Najprostszym uzasadnieniem będzie wykorzystanie faktu, że mnożenie i dzielenie są działaniami odwrotnym. Spróbujmy przeprowadzić rozumowanie nie wprost, które z powodzeniem możemy wykorzystać we wczesnej edukacji.

Uzasadnienie niewykonalności dzielenia przez 0

Przyjmijmy nie wprost, że istnieje iloraz, którego dzielnik wynosił zero. Wtedy iloczyn dzielnika i ilorazu byłby równy 0 dla dowolnie wybranej dzielnej, co

oczywiście jest nieprawdą dla np. dzielnej równej dowolnej liczbie naturalnej różnej od zera. Nie oznacza to oczywiście, że dla dzielnej równej 0 możemy dzielić przez 0. Ten przypadek wykluczamy na podstawie niejednoznaczności uzyskanego ilorazu, bo wtedy mógłby być dowolną liczbą. Pozostaje jeszcze kwestia przełożenia tego rozumowania na zestaw działań na liczbach, aby bez trudu uczniowie mogli poszukiwać iloczynów i ilorazów, pamiętając przy tym o odwrotności działań mnożenia i dzielenia. Za przykład posłużyć tu może zadanie dla uczniów wczesnej edukacji:

Wykonaj podane dzielenia, a wyniki sprawdź za pomocą mnożenia.

a) 12 : 4 = 3, bo 4 · 3 = 12
b) 24 : 6 = ..., bo .....
c) 27 : 3 = ..., bo .....
d) 30 : 6 = ..., bo .....
e) 10 : 2 = ..., bo .....
f) 8 : 0 = ..., bo .....

Oczywiście, zanim przejdziemy do przykładu z dzieleniem przez 0, należy wykonać znacznie więcej przykładów działań, niż zapisałam. Zależy nam na tym, aby nie było trudności ze sprawdzeniem wyniku dzielenia za pomocą mnożenia i sprowokowaniu sytuacji, w której nastąpi tzw. konflikt poznawczy. Ponadto pamiętajmy, że w tym zadaniu przykłady powinny być na tyle proste, by nie odwracały uwagi uczniów od tego, co mają dostrzec. Wartością dodaną tego zadania jest samodzielność uczniowska dotycząca rozstrzygnięcia problemu dzielenia przez 0.

Podsumowując, w zbiorze liczb naturalnych możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Jednak tylko dodawanie i mnożenie określamy mianem *działań wykonalnych* w zbiorze liczb naturalnych. Działania wykonalne w pewnym zbiorze gwarantują nam, że dla dowolnych dwóch liczb ze zbioru wynik zawsze będzie należał do tego zbioru. Jak pokazaliśmy wcześniej, odejmowanie i dzielenie takimi działaniami nie są.

Na koniec podam kilka własności łączących działania arytmetyczne. Wykorzystujemy je do tzw. *sprytnych rachunków*. Sformułowanie „sprytne rachunki" zapożyczyłam od autorów podręczników szkolnych. Możemy w nich znaleźć zadania rachunkowe z poleceniem *Oblicz sprytnie*, które sugeruje uczniom, że z wykorzystaniem własności działań rachunki będą łatwiejsze.

Dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c zachodzą następujące prawa działań arytmetycznych:

1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *rozdzielność mnożenia względem dodawania*
2. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ *rozdzielność mnożenia względem odejmowania*
3. $(a + b) : c = a : c + b : c$ *rozdzielność dzielenia względem dodawania*
4. $(a - b) : c = a : c - b : c$ *rozdzielność dzielenia względem odejmowania*

Przykłady

- $34 \cdot 8 + 66 \cdot 8 = (34 + 66) \cdot 8 = 100 \cdot 8 = 800$
- $84 \cdot 5 - 34 \cdot 5 = (84 - 34) \cdot 5 = 50 \cdot 5 = 250$
- $107 \cdot 8 = (100 + 7) \cdot 8 = 100 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 800 + 56 = 856$
- $198 \cdot 6 = (200 - 2) \cdot 6 = 200 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 1200 - 12 = 1188$

Musimy jeszcze pamiętać, że działania na liczbach wykonujemy w pewnej ustalonej kolejności. Dla dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia obowiązują następujące reguły:

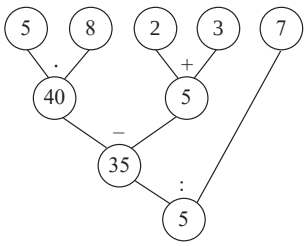
- pierwsze wykonujemy działania w nawiasach,
- mnożenie i dzielenie wykonujemy przed dodawaniem i odejmowaniem,
- gdy w działaniu występuje wyłącznie mnożenie i dzielenie, to wykonujemy je zgodnie z kolejnością występowania,
- gdy w działaniu występuje wyłącznie dodawanie i odejmowanie, to wykonujemy je zgodnie z kolejnością występowania.

W edukacji wczesnoszkolnej w celu ułatwienia opanowania reguł kolejności wykonywania działań stosuje się tzw. *drzewka*. To za ich pomocą uczniowie uczą się wyznaczać kolejność działań w złożonych przykładach arytmetycznych.

Przykład

- Kolejność wykonywania działań możemy zilustrować za pomocą „drzewka”, np.:

$$[5 \cdot 8 - (2 + 3)] : 7$$



4.1. O podzbiorach zbioru $\mathbb{N}$

Nie byłoby matematyki, gdyby nie ciągła potrzeba zaspokajania ciekawości poznawczej. Wyznaczyliśmy zbiór liczb naturalnych i określiliśmy w nim działania, a pozostał nam jeszcze wgląd w to, co kryje się w samych liczbach naturalnych. Wiemy już, że każda następna liczba naturalna od poprzedniej różni się o 1. Czy to wszystko? Okazuje się, że nie. Badając liczby naturalne, matematycy wyodrębnili wiele ciekawych podzbiorów w $\mathbb{N}$. Elementy podzbioru łączy pewna, istotnie wyróżniająca je spośród innych liczb naturalnych, cecha. Rozważmy zatem kilka przykładów podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Niektóre z nich pojawiają się już w edukacji wczesnoszkolnej.

Jednym z najstarszych podziałów $\mathbb{N}$ jest podział na liczby parzyste i nieparzyste. Liczby naturalne podzielne przez 2 (przy dzieleniu przez dwa dają resztę 0) nazywamy *liczbami parzystymi*, a pozostałe *liczbami nieparzystymi*. Jak nietrudno się domyślić, liczby nieparzyste przy dzieleniu przez 2 dają resztę 1.

Przykłady

- Liczby parzyste, np. 0, 2, 4, 6, 8, 10, …
- Liczby nieparzyste, np. 1, 3, 5, 7, 9, …
- Jeśli przyjmiemy, że dowolną liczbę naturalną oznaczymy przez n, to:
  - dowolną liczbę parzystą oznaczymy 2n,
  - dowolną liczbę nieparzystą oznaczymy[4] 2n + 1,
  - sumę kolejnych czterech liczb nieparzystych zapiszemy

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7).$$

Kolejne liczby, które były znane już w starożytności, to liczby pierwsze i złożone. Jednak zanim do nich przejdziemy, powinniśmy przypomnieć pewne pojęcia, tj. dzielnik i podzielność. Definiując dzielenie, wskazaliśmy, że liczba, przez którą dzielimy, nazywa się dzielnikiem. Ponadto dzielnikiem określa się liczbę, która dzieli inną liczbę naturalną bez reszty. Dla każdej liczby naturalnej możemy wyznaczyć zbiór jej dzielników, np. dla liczby 28 zbiór dzielników ma postać: $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 28\}$. Z dzielnikiem wiąże się pojęcie podzielności. Mówimy, że liczba naturalna jest podzielna przez daną liczbę naturalną różną

[4] Dowolną liczbę naturalną nieparzystą możemy oznaczyć również przez 2n – 1.

od zera (przypominam, że nie dzielimy przez 0), gdy ta jest jej dzielnikiem. Myślę, że z wyznaczeniem zbioru dzielników albo rozstrzygnięciem, czy pewna liczba jest podzielna przez inną, nie będzie trudności dla małych liczb. Jednak w przypadku liczb typu 3 782 915 taka trudność się pojawia. Oczywiście można skorzystać chociażby z algorytmów działań pisemnych (potocznie nazywanych działaniami w słupkach), ale jeśli ktoś nie lubi rachunków, zawsze pozostają *cechy podzielności*.

Tabela 8. Wybrane cechy podzielności liczb

Liczba jest podzielna przez		Przykład
2	gdy w rzędzie jedności ma 0, 2, 4, 6, 8	39 75**6**
3	gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3	32 712 (3 + 2 + 7 + 1 + 2 = 15)
4	gdy liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr jest podzielna przez 4	799 0**56**
5	gdy w rzędzie jedności ma 0 lub 5	28 365 005
6	gdy jest podzielna przez 2 i przez 3	32 712
8	gdy liczba utworzona z trzech ostatnich cyfr jest podzielna przez 8	765 **800**
9	gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9	2 379 465
10	gdy w rzędzie jedności ma 0	48 932 110
15	gdy jest podzielna przez 3 i przez 5	46 37 235

Źródło: opracowanie własne.

Teraz możemy powrócić do liczb pierwszych i złożonych. *Liczbą pierwszą* nazywamy liczbę naturalną, która ma tylko dwa dzielniki, tj. 1 i samą siebie. Wśród liczb pierwszych wyróżniamy: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Jedyną liczbą pierwszą parzystą jest liczba 2. Jak myślicie dlaczego? Otóż każda liczba parzysta większa od dwóch dzieli się przez 1, 2 i samą siebie, np. dzielnikami liczby 4 są 1, 2 i 4. *Liczbą złożoną* nazywamy liczbę naturalną, która ma więcej niż dwa dzielniki, np. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, … Każdą liczbę złożoną możemy zapisać za pomocą iloczynu liczb pierwszych, np. $15 = 3 \cdot 5$, bo liczby 3 i 5 są liczbami pierwszymi. Sprawa ponownie się komplikuje przy dużych liczbach, ale i na to matematycy znaleźli radę.

Przykład

- Rozkład liczby 420 na czynniki pierwsze, czyli działania prowadzące do przedstawienia liczby za pomocą iloczynu liczb pierwszych.

420	2	2 jest najmniejszym dzielnikiem liczby 420, który jest liczbą pierwszą
210	2	2 jest najmniejszym dzielnikiem liczby 210, który jest liczbą pierwszą
105	3	3 jest najmniejszym dzielnikiem liczby 105, który jest liczbą pierwszą
35	5	5 jest najmniejszym dzielnikiem liczby 35, który jest liczbą pierwszą
7	7	7 jest najmniejszym dzielnikiem liczby 7, który jest liczbą pierwszą
1		

Zatem $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Do omówienia zostały nam jeszcze dwie liczby naturalne, o których do tej pory nie wspomnieliśmy, omawiając liczby pierwsze i złożone. Te liczby to 0 i 1. Nie są to liczby pierwsze, bo 0 nie dzieli się przez samą siebie, a 1 ma tylko jeden dzielnik. Nie są to również liczby złożone, bo żadna z nich nie posiada co najmniej trzech dzielników.

Myślę, że wszyscy zgodzą się ze mną w kwestii poszukiwania i wyznaczania liczb pierwszych. Niektóre z nich utrwaliły się nam w pamięci i z łatwością je wskazujemy. Najprawdopodobniej ma to związek z ich powtarzalnością się w różnych przykładach i zadaniach. Jednak gdyby ktoś spytał mnie o liczby pierwsze większe od 100, musiałabym się zastanawiać. Takiego dylematu doświadczył pewnie Eratostenes[5], któremu zawdzięczamy jedną z metod wyznaczania liczb pierwszych, zwaną *sitem Eratostenesa*. Metoda ta polegała na wykreślaniu kolejnych wielokrotności liczb zapisanych w rzędach tak, jak w tabeli 9. Strategia, według której w systematyczny (choć może żmudny) sposób Eratostenes wyznaczał liczby pierwsze, prezentuje się następująco. Wykreślił ze zbioru liczb wszystkie wielokrotności liczby 2, pozostawiając dwójkę jako zidentyfikowaną liczbę pierwszą. Następnie wykreślił wszystkie wielokrotności 3, pozostawiając 3 jako kolejną liczbę pierwszą. Liczba 4 została wykreślona jako wielokrotność liczby 2, zatem możemy przejść do 5. Dla 5 również wykreślił wszystkie jej wielokrotności, pozostawiając ją samą itd. Po wykreśleniu wszystkich wielokrotności w tabeli pozostały tylko liczby pierwsze.

---

[5] Eratostenes (II w. p.n.e.) – grecki geograf i matematyk znany z tego, że obliczył obwód Ziemi.

Tabela 9. Sito Eratostenesa

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	...

Źródło: na podstawie Ciesielski, Pogoda (2015), s. 10.

Przejdźmy teraz do NWW i NWD, bo wiążą się one z podzielnością liczb naturalnych i odgrywają znaczącą rolę chociażby wtedy, gdy musimy znaleźć liczbę, przez którą uprościmy licznik i mianownik ułamka lub podczas poszukiwania wspólnego mianownika dwóch ułamków. Podane skróty NWW i NWD to pierwsze litery słów opisujących dane pojęcia matematyczne. NWW to *najmniejsza wspólna wielokrotność*, zaś NWD to *największy wspólny dzielnik*.

Przykłady

- Niech dane będą dwie liczby naturalne 24 i 36. Zbiory wielokrotności tych liczb różnych od zera mają postać: $W_{24} = \{24, 48, \underline{72}, 96, \ldots\}$ i $W_{36} = \{36, \underline{72}, 108, \ldots\}$ zatem NWW (24, 36) = 72.
- Niech dane będą dwie liczby naturalne 124 i 360. Wyznaczenie zbiorów wielokrotności tych liczb zajęłoby dużo więcej czasu niż dla 24 i 36. W przypadku dużych liczb przy poszukiwaniach NWW rozkładamy każdą z nich na czynniki pierwsze, by wybrać te, które po wymnożeniu dają poszukiwane NWW. Najprostszą strategią wyboru jest spisanie wszystkich dzielników

pierwszej liczby i dołożenie z drugiej tych, które się nie powtórzyły w pierwszej. Po wymnożeniu otrzymamy NWW.

124	2
62	2
31	31
1	

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

NWW (124, 360) = 2 · 2 · 31 · 2 · 3 · 3 · 5 = 11 160.

- Niech dane będą dwie liczby naturalne 54 i 72. Zbiory dzielników tych liczb mają postać:

  $D_{54} = \{1, 2, 3, 6, 9, \underline{18}, 27, 54\}$ i $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \underline{18}, 24, 36, 72\}$

  zatem NWD (54, 72) = 18.
- Niech dane będą liczby 17 i 31. Zbiory dzielników tych liczb mają postać: $D_{17} = \{1, 17\}$ i $D_{31} = \{1, 31\}$ zatem NWD (17, 31) = 1. Liczby, których największym wspólnym dzielnikiem jest 1, nazywamy *liczbami względnie pierwszymi*.
- Niech dane będą dwie liczby naturalne 308 i 380, dla których musimy wyznaczyć NWD. Wyznaczenie zbiorów dzielników każdej z tych liczb zajęłoby więcej czasu niż dla liczb 54 i 72. W tym wypadku też warto korzystać z innego rozwiązania. Szybszym sposobem będzie rozkład każdej z liczb na czynniki pierwsze, wybranie powtarzających się czynników w obu liczbach, a następnie ich wymnożenie.

308	2
154	2
77	7
11	11
1	

380	2
190	2
95	5
19	19
1	

Zatem NWD (308, 380) = 2 · 2 = 4.

Na koniec chciałabym podać przykłady liczb, o których rzadko mówi się w szkole. Proszę potraktować je jako ciekawostkę, bo w tym celu zostały tu umieszczone.

- Liczby bliźniacze to liczby pierwsze, które różnią się między sobą o dwa, np. 5 i 7 czy 17 i 19.
- Liczby doskonałe to takie liczby naturalne, których suma wszystkich dzielników mniejszych od tej liczby jest równa tej liczbie, np. najmniejszą liczbą doskonałą jest 6, bo 6 = 3 + 2 + 1. Innym przykładem jest liczba 28, bo suma jej dzielników wynosi 14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 28.
- Liczby zaprzyjaźnione to takie liczby naturalne a i b, które spełniają warunek: *suma wszystkich mniejszych od a dzielników naturalnych liczby a równa jest b i jednocześnie suma wszystkich mniejszych dzielników od b jest równa liczbie a*. Przykładami liczb zaprzyjaźnionych będą 220 i 284. Zauważmy, że każda liczba doskonała jest zaprzyjaźniona sama z sobą.

4.2. Liczby naturalne w dziesiątkowym systemie pozycyjnym

Liczby naturalne w *dziesiątkowym systemie pozycyjnym* zapisujemy za pomocą dziesięciu cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wartość znaku zależy od pozycji, na której się znajduje, stąd też w nazwie pojawia się termin „pozycyjny". Ponadto istotną cechą systemu jest własność, która mówi, że dziesięć jednostek niższego rzędu daje jedną jednostkę wyższego rzędu, czyli 10 jedności daje 1 dziesiątkę, 10 dziesiątek daje 1 setkę itd. Każdą liczbę w dziesiątkowym systemie pozycyjnym możemy przedstawić za pomocą ciągu cyfr

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3}\, a_{n-4} \ldots a_0$$

natomiast wartość tej liczby wynosi

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-3} \cdot 10^{n-3} + a_{n-4} \cdot 10^{n-4} + \ldots + a_0 \cdot 10^0$$

gdzie a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}, …, a_0 przyjmują wartości od 0 do 9. Kolejne potęgi liczby 10 nazywamy rzędami. Każde trzy rzędy naszej liczby budują grupę. Grupy wyznaczamy od końca, łącząc dla każdej z nich trzy znaki. Rozważmy liczbę 34 587 262 198. Zapisana za pomocą sumy potęg liczby 10 przyjmuje postać:

$$3 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 +$$
$$+ 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Tabela 10. Dziesiątkowy system pozycyjny

…	Grupa milardów			Grupa milionów			Grupa tysięcy			Grupa jedności		
	rząd setek	rząd dziesiątek	rząd jedności	rząd setek	rząd dziesiątek	rząd jedności	rząd setek	rząd dziesiątek	rząd jedności	rząd setek	rząd dziesiątek	rząd jedności
		3	4	5	8	7	2	6	2	1	9	8

Źródło: opracowanie własne.

Słownie naszą liczbę zapiszemy:

trzydzieści cztery miliardy pięćset osiemdziesiąt siedem milionów dwieście sześćdziesiąt dwa tysiące sto dziewięćdziesiąt osiem.

Dziesiątkowy system pozycyjny najprawdopodobniej pochodzi z Indii. Pojawił się w Europie za pośrednictwem Arabów, stąd też do dziś cyfry, którymi zapisujemy liczby, nazywamy *cyframi arabskimi.* Do rozpowszechnienia się w Europie dziesiątkowego systemu pozycyjnego (X–XIII w.) przyczyniły się praca arabskiego matematyka i astronoma Alchwarizmiego z zakresu arytmetyki przetłumaczona na język łaciński XII wieku oraz dzieło *Liber abaci* (Księga abaku) autorstwa włoskiego matematyka Fibonacciego[6] z 1202 roku (Waliszewski, 1989, s. 272). Niestety w Europie nie od razu przyjął się nowy sposób zapisywania liczb. Potrzeba było kilku wieków, by nie tylko kupcy, ale i uczeni zaczęli się nim posługiwać. Stosowany jest do dziś na całym świecie, choć świat komputerów przyjął inny (o czym w rozdziale dotyczącym niedziesiątkowych systemów pozycyjnych).

[6] Leonardo Fibonacci (1175–1250) – włoski matematyk. Jednym z jego najpopularniejszych dzieł jest ciąg Fibonacciego.

4.3. O związkach pomiędzy zbiorami i liczbami naturalnymi

Na początku rozdziału pisałam, że liczby naturalne długo traktowano jako cechę równolicznych zbiorów skończonych. Jednak to nie wszystkie związki między zbiorami i liczbami naturalnymi. Zanim do tego przejdziemy, zdefiniuję liczbę *kardynalną zbiorów* (inaczej *moc zbiorów*).

Niech dane będą bijekcje f_1: $A \to B$, f_2: $B \to C$ i f_3: $C \to A$, gdzie A, B, C są trzema skończonymi zbiorami. Wtedy o tych zbiorach możemy powiedzieć, że są równoliczne. A skoro są równoliczne, to mają taką samą liczbę elementów. Tę liczbę elementów matematycy nazywają *liczbą kardynalną zbioru* lub *mocą zbioru*. Jeśli liczbę kardynalną dowolnego zbioru Z oznaczymy przez k(Z), to dla naszych zbiorów A, B, C zachodzi równość: $k(A) = k(B) = k(C)$. Znaczy to dokładnie tyle, że liczby kardynalne (moce) tych zbiorów są sobie równe. Niekiedy liczbę kardynalną zbioru oznaczamy $|A|$ lub $\overline{\overline{A}}$. Z tym drugim oznaczeniem czytelnik mógł się spotkać na lekcjach matematyki przy omawianiu treści z zakresu rachunku prawdopodobieństwa.

Przykłady

- Niech dane będą zbiory $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \emptyset$, $C = \{\emptyset\}$, $D = \{x \in N: 5 < x < 20\}$. Liczby kardynalne tych zbiorów to: $k(A) = 4$, $k(B) = 0$, $k(C) = 1$, $k(D) = 14$.
- Liczby naturalne są liczbami kardynalnymi zbiorów skończonych, np. liczba 7 jest liczbą kardynalną zbioru siedmioelementowego.

Związki między zbiorami a działaniami na liczbach naturalnych

Mając już zdefiniowaną liczbę kardynalną zbioru, spróbujemy poszukać związków między zbiorami a działaniami na liczbach naturalnych. W tym celu rozważymy kilka przykładów.

Niech dane będą dwa zbiory $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczymy sumę tych zbiorów oraz określimy liczbę kardynalną zbioru A, B i $A \cup B$:

$$k(A) = 3,\ k(B) = 4,\ A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

zatem $k(A \cup B) = 5$.

Okazuje się, że nie zachodzi równość $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$. Jak myślicie dlaczego? Jedyną możliwą odpowiedzią w tym wypadku są powtarzające się w obu zbiorach elementy (zbiory A i B nie są rozłączne). Dlatego wyznaczając liczbę kardynalną zbiorów, powinniśmy pamiętać, że elementy wspólne tych zbiorów są dwukrotnie brane pod uwagę podczas wyznaczania liczb kardynalnych dla A oraz B. To implikuje poniższą definicję.

O sumie liczb kardynalnych zbiorów

Niech dane będą zbiory skończone A i B. Suma liczb kardynalnych tych zbiorów jest równa sumie liczby kardynalnej złączenia tych zbiorów oraz liczby kardynalnej przekroju tych zbiorów, co zapisujemy

$$k(A \cup B) + k(A \cap B) = k(A) + k(B)$$

Wracając do naszego przykładu otrzymujemy:

$$k(A \cup B) + k(A \cap B) = 5 + 2 = 7 = 3 + 4 = k(A) + k(B)$$

czyli równość $k(A \cup B) + k(A \cap B) = k(A) + k(B)$ jest prawdziwa.

Sprawa upraszcza się w przypadku zbiorów rozłącznych, bo jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $k(A \cap B) = 0$ i nasza równość przyjmuje postać $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$.

Zobaczmy to na kolejnym przykładzie. Niech $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $B = \{g, h, i, j, k\}$. Liczby kardynalne dla zbiorów A oraz B wynoszą $k(A) = 6$, $k(B) = 5$. Wiemy, że $A \cap B = \emptyset$ (zbiory A i B są rozłączne, czyli nie mają żadnego elementu wspólnego), zatem $k(A \cup B) = 6 + 5 = 11$.

Przyjrzyjmy się teraz zależnościom między różnicą zbiorów a liczbami naturalnymi. Niech dane będą dwa nierozłączne zbiory skończone A i B, tj. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oraz $B = \{6, 7, 8, 9\}$. Wówczas $A \setminus B = \{2, 3, 4, 5\}$ i $A \cap B = \{6, 7\}$. Liczby kardynalne dla poszczególnych zbiorów wynoszą:

$$k(A) = 6,\ k(B) = 4 \text{ i } k(A \setminus B) = 4 \text{ i } k(A \cap B) = 2$$

Zatem aby wyznaczyć liczbę kardynalną różnicy zbiorów, wystarczy od liczby kardynalnej zbioru A odjąć liczbę kardynalną przekroju tych zbiorów, tj. $k(A \setminus B) = 6 - 2 = 4$.

O liczbie kardynalnej różnicy zbiorów

Niech dane będą zbiory skończone A i B. Liczba kardynalna różnicy tych zbiorów jest równa różnicy liczby kardynalnej zbioru A i liczby kardynalnej przekroju tych zbiorów, co zapisujemy

$$k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B)$$

Tu, tak jak w przypadku liczby kardynalnej sumy zbiorów, gdy zbiory A i B są rozłączne, w miejsce liczby kardynalnej przekroju do wzoru wpisujemy 0. A co otrzymamy, gdy jeden ze zbiorów jest podzbiorem drugiego zbioru? W tym wypadku sytuacja również nie jest skomplikowana, bo wtedy liczba kardynalna przekroju zbiorów A i B jest równa liczbie kardynalnej zbioru B i nasz wzór przyjmuje postać $k(A \setminus B) = k(A) - k(B)$.

Pokazaliśmy, jakie zależności występują między sumą zbiorów a dodawaniem oraz między różnicą zbiorów a odejmowaniem. Przyjrzyjmy się teraz zależności między iloczynem kartezjańskim a mnożeniem liczb naturalnych.

Weźmy dwa dowolne zbiory skończone $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{x, y\}$ i wyznaczmy ich iloczyn kartezjański, tj. $A \times B = \{(a, x), (b, x), (c, x), (a, y), (b, y), (c, y)\}$. Teraz wyznaczmy liczby kardynalne zbiorów dla A, B oraz $A \times B$. Otrzymujemy następujące wartości:

$$k(A) = 3,\ k(B) = 2,\ k(A \times B) = 6$$

Okazuje się, że:

$$k(A \times B) = 6 = 3 \cdot 2 = k(A) \cdot k(B)$$

Z prawa przechodniości mamy:

$$k(A \times B) = k(A) \cdot k(B)$$

Oczywiście wykonując rachunki, nikt nie korzysta z tak rozbudowanych sposobów dodawania, odejmowania i mnożenia. Zależało mi tylko na tym, aby czytelnicy zobaczyli, jak w inny sposób można zdefiniować te działania arytmetyczne.

Spróbujmy teraz wykorzystać poznane związki między zbiorami a działaniami na liczbach naturalnych do udowodnienia przykładowej własności łączącej dodawanie i mnożenie. Niech A, B, C będą rozłącznymi zbiorami skończonymi takimi, że $a = k(A)$, $b = k(B)$, $c = k(C)$, dla których zachodzi własność:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *rozdzielność mnożenia względem dodawania*

$$L = a \cdot (b + c) = k(A) \cdot [k(B) + k(C)] = k(A) \cdot [k(B \cup C)] = k[A \times (B \cup C)] =$$
$$= k[(A \times B) \cup (A \text{ x } C)] = k(A \times B) + k(A \times C) = k(A) \cdot k(B) + k(A) \cdot k(C) =$$
$$= a \cdot b + a \cdot c = P$$

4.4. Liczby naturalne we wczesnej edukacji

W edukacji wczesnoszkolnej uczniowie przygodę z liczbami rozpoczynają właśnie od zbioru liczb naturalnych. Nie bez powodu. Ich powszechność nie jest przez nikogo kwestionowana, a zatem to, co bliskie doświadczeniom dziecka, uczyniono punktem startowym do matematyki. Liczby naturalne w klasach początkowych są wykorzystywane do określania liczebności zbiorów skończonych, do przeliczania i porównywania zbiorów, do określenia miejsca w pewnym porządku, opisania wyników pomiaru czy wreszcie do rachunków. Mówimy, że liczby naturalne są wykorzystywane w różnych aspektach, np.:

- aspekt kardynalny (mnogościowy) – gdy liczb naturalnych używamy do określenia liczby elementów w danym zbiorze, odpowiadają na pytanie *Ile jest elementów* w danej kolekcji?;
- aspekt porządkowy – gdy liczby naturalne są wykorzystywane do określenia występowania obiektu w danym porządku, odpowiadają na pytanie *Który z kolei? Na którym miejscu?*;
- aspekt miarowy – gdy za pomocą liczby naturalnej opisujemy pewien wynik pomiaru wielkości ciągłych, np. długość, masę, objętość, czas;
- aspekt algebraiczny liczby naturalnej – związany ze składem i wewnętrzną strukturą liczb, a także z działaniami na liczbach; przy opracowaniu monograficznym liczb naturalnych utożsamiany jest z rozkładem liczby na dwa, trzy i więcej składników;
- aspekt wartości (liczba jako wartość) – gdy liczbę naturalną wykorzystujemy do opisu pewnej umownie przyjętej wartości dla danej wielkości, np. wartość danej kwoty, ocena za sprawdzian czy punktacja konkursowa;
- aspekt kodowy (kodujący) – gdy liczbie naturalnej przypisaliśmy pewien kod, np. numer autobusu linii 75 w pewnym mieście, nr PESEL, nr telefonu.

Kształtowanie pojęcia liczby naturalnej poprzez posługiwanie się nią w różnych aspektach nie może koncentrować się na utrwaleniu, że liczbę naturalną

możemy stosować w wielu sytuacjach. Liczba dziecięcych doświadczeń ma prowadzić do „oderwania" liczby naturalnej od konkretnego przedmiotu, z którym współwystępuje w danej sytuacji zadaniowej. Istotą tych wszystkich dziecięcych doświadczeń matematycznych na poziomie wczesnej edukacji jest uświadomienie, że liczba naturalna jest pojęciem abstrakcyjnym, a utożsamianie jej z obiektem fizycznym jest błędem.

Jedną z wartościowych pomocy dydaktycznych, która w znaczący sposób ułatwia uczniom wkraczanie w świat liczb naturalnych, są *kolorowe liczby* (nazywane *klockami Cuisenaire'a*[7] lub *liczbami w kolorach*). Kolorowe liczby to zestaw drewnianych klocków w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, których podstawa jest kwadratem o boku 1 cm, a długości klocków zmieniają się w zakresie od 1 cm do 10 cm. Dodatkowo klocki różnią się między sobą kolorem. Kolorystyka klocków nie jest przypadkowa. Jest dobrana celowo by prezentować pewne prawidłowości, tj.

- klocki długości 2 cm, 4 cm, 8 cm (kolejne potęgi liczby 2) mają barwę pochodną od czerwonego;
- klocki długości 3 cm, 6 cm, 9 cm (kolejne wielokrotności liczby 3) mają barwę pochodną od niebieskiego;
- klocki długości 5 cm i 10 cm (wielokrotności liczby 5) mają różne odcienie barwy żółtej;
- klocek długości 1 cm jest biały, a klocek długości 7 cm jest czarny (Semadeni, 1981, s. 82).

Nie opisuję szczegółowo kolorów poszczególnych klocków. W zestawach dostępnych na rynku te kolory się różnią. Najważniejszą cechą, na którą powinniśmy zwrócić uwagę przy zakupie zestawu kolorowych liczb, jest zachowanie zależności między długością klocka a jego kolorem. Kolorowe liczby możemy wykorzystać do omawiania liczb naturalnych w kolejnych aspektach, tj. kardynalnym, porządkowym, miarowym czy algebraicznym, gdy uczniowie budują tzw. dywaniki liczbowe. Ponadto klocki bardzo dobrze sprawdzają się podczas wprowadzania działań arytmetycznych i ich własności.

---

[7] Georges Cuisenaire (1891–1975) – belgijski nauczyciel, twórca kolorowych liczb.

4.5. Zadania – liczby naturalne

Zadanie 4.1

Zapisz słownie liczby: 5 832, 280 007, 3 000 270 podane w dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

Zadanie 4.2

Zapisz liczby dziesiątkowego systemu pozycyjnego za pomocą cyfr:

a) cztery miliony dwadzieścia jeden tysięcy pięć,
b) osiem tysięcy osiem.

Zadanie 4.3

Zapisz za pomocą cyfr i słownie najmniejszą liczbę dziesiątkowego systemu pozycyjnego złożoną z siedmiu różnych cyfr.

Zadanie 4.4

Przedstaw podane w dziesiątkowym systemie pozycyjnym liczby za pomocą sumy wielokrotności potęg liczby 10: 367, 230 789, 10 002 345.

Zadanie 4.5

Wśród dodatnich liczb naturalnych mniejszych od 30 wskaż:

a) liczby pierwsze,
b) liczby złożone,
c) kwadraty liczb,
d) sześciany liczb,
e) wielokrotności liczby 5.

Zadanie 4.6

Wśród podanych w ramce liczb wskaż liczby podzielne przez:

a) 3,
b) 6,
c) 8,
d) 12.

1014	1299	2025	3440
3307	5508	6099	8244

Zadanie 4.7

Przedstaw liczbę 12 jako iloczyn dodatnich liczb naturalnych na trzy sposoby.

Zadanie 4.8

Rozłóż liczbę 348 na czynniki pierwsze i przedstaw ją w postaci iloczynu.

Zadanie 4.9

Jaka jest reszta z dzielenia liczby 2456 przez 9?

Zadanie 4.10

Podaj przykład liczby, która przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2.

Zadanie 4.11

Podaj przykład liczby, która przy dzieleniu przez 2022 daje resztę 5.

Zadanie 4.12

Przedstaw liczbę 10 jako sumę dwóch różnych liczb pierwszych.

Zadanie 4.13

Ile jest dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 6?

Zadanie 4.14

Podaj cyfrę jedności iloczynu jednocyfrowych liczb nieparzystych.

Zadanie 4.15

Czy różnica 70 987 – 11 872 jest podzielna przez 5? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.16

Czy iloczyn 26 787 · 50 723 jest podzielny przez 3? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.17

Suma trzech liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą. Rozstrzygnij, czy iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą, czy nieparzystą. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.18

Wiadomo, że liczba trzycyfrowa o różnych cyfrach jest większa od 900 i podzielna przez 9. Z jakich cyfr może składać się ta liczba? Podaj przykłady tych liczb.

Zadanie 4.19

Przez jakie liczby jednocyfrowe jest podzielny iloczyn: $22 \cdot 66 \cdot 35$?

Zadanie 4.20

Ile różnych dzielników ma liczba, której rozkład na czynniki pierwsze ma postać:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7?$$

Zadanie 4.21

Znajdź najmniejszą liczbę naturalną większą od 10, która przy dzieleniu przez 5 oraz przez 13 daje resztę 4.

Zadanie 4.22

Gdy podzielimy pewną liczbę przez 12, otrzymamy iloraz a i resztę 11. Gdy podzielimy tę samą liczbę przez 13, otrzymamy iloraz 11 i resztę 0. Jaka to liczba?

Zadanie 4.23

Czy liczbę 125 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych? Do uzyskania odpowiedzi wykorzystaj sito Eratostenesa.

Zadanie 4.24

Wyjaśnij, dlaczego suma $10^{15} + 5$ jest liczbą podzielną przez 15.

Zadanie 4.25

Sprawdź, czy poniższa suma jest podzielną przez 4 oraz przez 9.

$$3 \cdot 10 + 5 \cdot 10^7 + 10^9 + 9 \cdot 10^{20}$$

Zadanie 4.26

Wszystkie cyfry pewnej liczby są trójkami. Znajdź najmniejszą taką liczbę, która jest podzielna przez 27.

Zadanie 4.27

Niech dane będą liczby naturalne a, b, c i d spełniające warunki: $a > 0$, $a < b$, $c \geq 0$, $c < d$. Uzupełnij zapisy, wstawiając w miejsce kropek jeden z następujących znaków: $<$, $>$, $=$, $\leq$, $\geq$. Czy w każdym z tych przypadków możemy określić znak? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a \cdot b \ldots 0$
b) $a - b \ldots 0$
c) $\frac{a}{b \cdot d} \ldots 0$
a) $a + c \ldots 0$
b) $a \cdot c \cdot d \ldots 0$
c) $a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots 0$

Zadanie 4.28

Pewną liczbę naturalną trzycyfrową zapisano za pomocą cyfr a, b, c tak, że a oznacza cyfrę setek, b cyfrę dziesiątek, a c cyfrę jedności. Następnie zamieniono miejscami cyfry jedności i setek. Oblicz różnicę tych liczb. Przez jaką liczbę jest podzielna ta różnica? Co dostrzegasz?

Zadanie 4.29

Niech n oznacza dowolną liczbę naturalną. Zapisz sumę trzech kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejszą jest liczba n. Wykonaj redukcję wyrazów podobnych. Sprawdź, przez jaką liczbę jest podzielna ich suma. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.30

Niech dana będzie liczba dwucyfrowa, w której cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności. Wykaż, że różnica tej liczby i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest liczbą podzielną przez 9.

Zadanie 4.31

Przemienność mnożenia zastosowano, wykonując przekształcenie:

a) $43 \cdot (70 + 8) = 43 \cdot 70 + 43 \cdot 8$
b) $5 \cdot 7 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 7$
c) $(20 - 4) \cdot 5 = 20 \cdot 5 - 4 \cdot 5$

Zadanie 4.32

Wykonując przekształcenie $23 \cdot 8 + 77 \cdot 8 = (23 + 77) \cdot 8$, zastosowano:

a) łączność mnożenia i przemienność dodawania,
b) łączność dodawania i przemienność mnożenia,
c) rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Zadanie 4.33

Wykonując przekształcenie $204 \cdot 8 = 1600 + 32 = 1632$, zastosowano:

a) łączność dodawania i mnożenia,
b) łączność dodawania i przemienność mnożenia,
c) rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Zadanie 4.34

Wykonując przekształcenie $9990 : 5 = 2000 - 2 = 1998$, zastosowano:

a) przemienność mnożenia i dzielenia,
b) łączność dzielenia i przemienność odejmowania,
c) rozdzielność dzielenia względem odejmowania.

Zadanie 4.35

Która z własności działań nie istnieje?

a) przemienność odejmowania,
b) łączność dodawania,
c) rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Zadanie 4.36

Wykonując przekształcenie $4 \cdot 6 \cdot (5 + 10 + 25) = 4 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 6 \cdot 25 = 4 \cdot 30 + 4 \cdot 60 + 6 \cdot 100 = 120 + 240 + 600 = 120 + 840 = 960$, nie zastosowano:

a) przemienności mnożenia,
b) łączności dodawania,
c) łączności mnożenia,
d) przemienności dodawania.

Zadanie 4.37

Oblicz w pamięci, korzystając z własności działań. Podaj, z jakich własności korzystałeś.

a) $(144 + 59) + 356 =$
b) $43 + (157 + 78) =$
c) $(64 \cdot 5) \cdot 2 =$
d) $(25 \cdot 7) \cdot 4 =$
e) $13 + 109 + 27 + 2 + 91 =$
f) $20 \cdot 37 \cdot 5 =$
g) $11 \cdot 17 =$
h) $23 \cdot 99 =$
i) $38 \cdot 102 =$
j) $75 \cdot 17 + 25 \cdot 17 =$
k) $7 \cdot 8 + 43 \cdot 8 =$

Zadanie 4.38

Wypisz wszystkie wielokrotności:

a) liczby 8 większe od 30 i mniejsze od 89,
b) liczby 17 większe od 43 i mniejsze od 137,
c) liczby 28 większe od 111 i mniejsze od 333,
d) liczby 72 większe od 500 i mniejsze od 1000.

Zadanie 4.39

Wiedząc, że liczba 8246 jest wielokrotnością liczby 14, rozstrzygnij, która z liczb 9144 czy 9142 jest wielokrotnością liczby 14. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.40

Ile jest trzycyfrowych wielokrotności liczby 12?

Zadanie 4.41

Wypisz wszystkie naturalne dzielniki liczb: 28, 78, 512, $4 \cdot 6$.

Zadanie 4.42

Wypisz wszystkie liczby pierwsze większe od 79 i mniejsze od 111.

Zadanie 4.43

Przedstaw w postaci iloczynu liczb pierwszych liczby: 240, 333, 729.

Zadanie 4.44

Wyznacz NWD liczb 28 i 156 oraz NWW liczb 35 i 14.

Zadanie 4.45

Wyznacz NWW dwóch względnie pierwszych liczb a i b.

Zadanie 4.46

Wykaż, że suma kwadratów kolejnych dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

Zadanie 4.47

Kasia przedstawiła swoje rozwiązanie. Co myślisz o propozycji Kasi? Czy można zrobić to prościej? Przedstaw swoje rozwiązanie.

$$35 + (144 : 6 - 6 \cdot 3) \cdot 0 = 35 + (24 - 18) \cdot 0 = 35 + 6 \cdot 0 = 35 + 0 = 35$$

Zadanie 4.48

Od jednego miliona odejmujemy pięćset czterdzieści osiem tysięcy. Różnica ta wynosi:

a) 1 548 000,
b) 452 000,
c) 460 200,
d) 648 000.

Zadanie 4.49

Jaką liczbę należy wstawić w miejsce @, aby wartość wyrażenia była równa 1280?

$$[(32 \cdot @) : 25] \cdot 4$$

Zadanie 4.50

W liczbie 2 547 32_ w rzędzie jedności brakuje cyfry. Dopisz cyfrę jedności tak, aby liczba była podzielna przez

a) 4,
b) 6,
c) 12,
d) 15.

Rozważ wszystkie przypadki. Czy w każdym podpunkcie znajdziemy liczbę jedności? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.51

Ile dziesiątek zawiera liczba 1245, a ile dziesiątek zawiera liczba 3 458 000?

Zadanie 4.52

Jak zmieni się iloraz dwóch liczb, jeśli dzielną zwiększymy trzykrotnie, a dzielnik pozostanie bez zmian?

Zadanie 4.53

Jak zmieni się suma dwóch liczb, jeśli jeden ze składników zwiększymy o 3?

Zadanie 4.54

Jak zmieni się różnica dwóch liczb, jeśli odjemną zwiększymy o 5, a odjemnik zmniejszymy o 7?

Zadanie 4.55

Jak zmieni się iloczyn dwóch liczb, jeśli mnożną zwiększymy trzykrotnie, a mnożnik zmniejszymy trzykrotnie?

Zadanie 4.56

Która z poniższych własności ułatwi wyznaczenie w pamięci wartości iloczynu $17 \cdot 8$?

a) rozdzielność dzielenia względem dodawania,
b) przemienność mnożenia,
c) rozdzielność mnożenia względem dodawania,
d) rozdzielność dzielenia względem odejmowania.

Zadanie 4.57

W zbiorze liczb naturalnych wykonalne są następujące działania:

a) dodawanie,
b) dodawanie i odejmowanie,
c) mnożenie i dodawanie,
d) wszystkie cztery działania arytmetyczne są wykonalne w zbiorze liczb naturalnych.

Zadanie 4.58

Która z poniższych równości jest prawdziwa:

a) $(7 + 14) \cdot 3 = 66$
b) $(1 - (1 - (1)) = 2$
c) $(26 - 17) \cdot 4 = 35$
d) żadna odpowiedź nie jest prawdziwa.

Zadanie 4.59

Oblicz poniższe działania:

a) suma liczby 5 i potrojonej liczby 7,
b) iloraz sumy liczb 6 i 10 przez różnicę liczb 12 i 4,
c) różnica kwadratu liczby 12 oraz liczby 24,
d) iloczyn podwojonej sumy liczb 5 i 6 oraz podwojonej różnicy liczb 8 i 4.

Zadanie 4.60

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

a) liczby naturalne mogą być ujemne,
b) liczby naturalne różnią się zawsze jedna od drugiej o 1,
c) kolejna liczba naturalna jest zawsze większa od poprzedniej o 1,
d) odejmowanie jest działaniem wykonalnym w zbiorze liczb naturalnych.

Zadanie 4.61

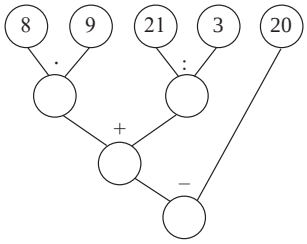
Zilustruj poniższe przykłady „drzewkami” i oblicz.

a) $2 \cdot (3 + 5) - 4 : 2 =$
b) $2 \cdot (3 + 7) - 5 =$
c) $(20 + 10) : 5 - (3 + 2) + 1 =$
d) $33 - 3 \cdot (2 + 8) + 8 - (14 - 8) : 2 =$

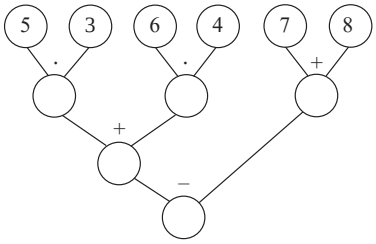
Zadanie 4.62

Uzupełnij poniższe drzewka i opisz je za pomocą działania.

a)



b)



Zadanie 4.63

Niech dane będą zbiory $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ oraz $B = \{a, b, c, d\}$. Wyznacz $A \times B$ oraz określ liczbę kardynalną dla zbiorów A, B, $A \times B$.

Zadanie 4.64

Sprawdź, czy dla dowolnie wybranych przez ciebie dwóch liczb naturalnych zachodzi równanie:

$$NWW(a, b) \cdot NWD(a, b) = a \cdot b$$

5. Niedziesiątkowe systemy pozycyjne

Mimo powszechności dziesiętnego systemu pozycyjnego, należy wspomnieć o innych pozycyjnych systemach liczbowych. Pierwszym, przy którym się zatrzymamy, będzie *system dwójkowy*, zwany *binarnym*. Do zapisu liczb w systemie dwójkowym wykorzystuje się cyfry 0 i 1, a podstawą tego systemu jest liczba 2. Rozważmy przykłady liczb zapisanych w systemie dwójkowym i zastanówmy się, jaką liczbę wskazują w dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

Chcąc zamienić liczbę z systemu dwójkowego na dziesiątkowy, musimy przedstawić ją w postaci sumy potęg liczby 2, a następnie wystarczy zsumować otrzymane składniki. Najwyższą potęgę 2 ustalamy, przeliczając znaki wykorzystane do zapisu liczby. Przyjrzyjmy się poniższym przykładom. Mimo że znaków w poniższych liczbach jest odpowiednio 7 i 9, to najwyższe potęgi liczby 2 to 6 i 8. Wynika to z konieczności uwzględnienia zerowej potęgi liczby 2.

Przykłady

- $(1\ 101\ 001)_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105$
- $(100\ 010\ 111)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 256 + 16 + 4 + 2 + 1 = 279$

Jeśli teraz chcielibyśmy zamienić liczbę zapisaną w dziesiątkowym systemie pozycyjnym na liczbę w systemie dwójkowym, to musimy ją przedstawić w postaci sumy iloczynów odpowiednich potęg liczby 2 oraz liczb 0 lub 1. Żeby tego dokonać, w pierwszej kolejności rozkładamy liczbę na sumę potęg liczby 2. Poszukując wymaganego rozkładu liczby, powinniśmy kierować się ważną zasadą. Pamiętajmy, że za każdym razem musimy wskazać najwyższą możliwą potęgę 2, która zmieści się w danej liczbie. I tak dla 81 najwyższą nieprzekraczającą potęgą 2 jest 64. Stąd wynika, że naszą liczbę musimy rozłożyć na (64 + 17). Do rozłożenia zostało jeszcze 17, bo nie jest żadną potęgą 2. Z liczbą 17 postępujemy

analogicznie jak z 81, tj. najwyższą nieprzekraczającą potęgą liczby 2 jest 16 (17 = 16 + 1). Pozostała liczba 1, która jest równa 2^0.

Przykłady

- $81 = 64 + 16 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^0 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (1\ 010\ 001)_2$
- $678 = 512 + 128 + 32 + 4 + 2 = 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1 = 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1\ 010\ 100\ 110)_2$

Oczywiście nie jest to jedyny sposób. Bardzo wygodnym i chętnie wykorzystywanym sposobem jest odnotowywanie reszt z dzielenia przez 2. W systemie dwójkowym reszta z dzielenia wynosi 0 albo 1. Następnie wystarczy odczytać uzyskane reszty od dołu do góry.

678	0
339	1
169	1
84	0
42	0
21	1
10	0
5	1
2	0
1	1

System dwójkowy jest wykorzystywany w informatyce, mówi się o nim „język komputerów". Informacje, które przesyła procesor, są podawane za pomocą ciągu 0 i 1. Powodem takiego rozwiązania jest mniejsze prawdopodobieństwo błędu i łatwość użycia, gdyż najprościej przypisać dwa znaki do sytuacji: *jest impuls, nie ma impulsu*.

Tak jak zbudowaliśmy liczby w systemie dwójkowym, tak też możemy budować system trójkowy, czwórkowy, piątkowy itd. Należy jedynie pamiętać o tym, jaka liczba jest podstawą danego systemu oraz jakie cyfry mamy do dyspozycji. Nietrudno dostrzec, że jeśli chcielibyśmy zapisywać liczby w systemie szóstkowym, to jego podstawą uczynimy liczbę 6. Skoro 6 jest podstawą, to znaczy, że sześć jednostek niższego rzędu tworzy jedną jednostkę wyższego rzędu. Ponadto wiemy, że liczby w systemie szóstkowym zapisujemy za pomocą cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5. Zwróćmy uwagę, że są one wszystkimi możliwymi resztami z dzielenia przez 6.

Oczywiście nie może być inaczej, bo wtedy nie zostałby spełniony warunek podstawy systemu. Dla ćwiczenia zamienimy dwie liczby z dziesiątkowego systemu pozycyjnego na system czwórkowy oraz dwie z systemu czwórkowego na dziesiątkowy.

Przykłady

- Zamiana liczb z systemu czwórkowego na system dziesiątkowy.

  $(201)_4 = 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 2 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 32 + 0 + 1 = 33$

  $(23\ 021)_4 = 2 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 2 \cdot 256 + 3 \cdot 64 + 0 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 512 + 192 + 8 + 1 = 713$

- Zamiana liczb z systemu dziesiątkowego na system czwórkowy.

  W tym przypadku sprawa się nieco komplikuje. Do przekształcenia liczby potrzebujemy potęg liczby 4. Odnotowanie ich na „marginesie" znacznie upraszcza zadanie. Kolejne potęgi liczby 4 to $4^0 = 1$, $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$, $4^6 = 4096$, …

  Przejdźmy teraz do zamiany z systemu dziesiątkowego na czwórkowy.

  $239 = 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = (3233)_4$

  $2022 = 1024 + 3 \cdot 256 + 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 1 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = (133\ 212)_4$

  Teraz liczbę 2022 zamienimy sposobem powszechnie uważanym za łatwiejszy. W przypadku systemu czwórkowego po prawej zapisujemy reszty z dzielenia przez 4.

2022	2
505	1
126	2
31	3
7	3
1	1

Rodzi się pytanie, czy w momencie, gdy kończą się cyfry, kończą się nasze systemy liczbowe. Otóż nie. Na przykład dwunastkowy system liczbowy oprócz cyfr od 0 do 9 wykorzystuje litery A i B. Literze A przypisuje się 10, a literze B 11. Zatem liczba zapisana w systemie dwunastkowym, np. 5AB7, w systemie dziesiątkowym przyjmuje postać:

$$5AB7 = 5 \cdot 12^3 + A \cdot 12^2 + B \cdot 12^1 + 7 \cdot 12^0 = 5 \cdot 12^3 + 10 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 7 \cdot 12^0 =$$
$$= 5 \cdot 1728 + 10 \cdot 144 + 11 \cdot 12 + 7 \cdot 1 = 8640 + 1440 + 132 + 7 = 10\,219$$

Na liczbach w każdym z systemów liczbowych możemy wykonywać działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia. Rachunki wykonujemy analogicznie do tych w dziesiątkowym systemie pozycyjnym. Musimy tylko pamiętać, ile jedności w danym systemie tworzy jedną jednostkę wyższego rzędu.

- Przykłady dodawania liczb:

w systemie dziewiątkowym

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 7 & 3 & 4 \\ + & & 8 & 2 & 6 \\ \hline & 3 & 6 & 6 & 1 \end{array}$$

w systemie szóstkowym

$$\begin{array}{rccccc} & 2 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ + & & 3 & 4 & 4 & 3 \\ \hline & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \end{array}$$

- Przykłady odejmowania liczb:

w systemie siódemkowym

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 2 & 3 & 6 \\ - & & 4 & 5 & 1 \\ \hline & 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}$$

w systemie trójkowym

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & 0 & 0 & 1 \\ - & & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

- Przykłady mnożenia i dzielenia liczb:

w systemie trójkowym

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 0 & 2 \\ \cdot & & & 2 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 2 \\ + & 2 & 1 & 1 & \\ \hline & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

w systemie dwójkowym

$$\begin{array}{rccccccc} & & 1 & 0 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & : & 1 & 1 \\ - & 1 & 1 & & & & & \\ \cline{2-3} & & & 1 & 1 & & & \\ & & - & 1 & 1 & & & \\ \cline{3-5} & & & & = & & & \end{array}$$

5.1. Zadania – niedziesiątkowe systemy pozycyjne

Zadanie 5.1

Zapisz w systemie dziesiątkowym liczby podane w systemie dwójkowym:

a) 1 010 001,
b) 1 010 101 011,
c) 111 011 011,
d) 110 111.

Zadanie 5.2

Podane w dziesiątkowym systemie pozycyjnym liczby zapisz w systemie dwójkowym.

a) 78,
b) 296,
c) 748,
d) 2564.

Zadanie 5.3

Wykonaj działania w systemie dwójkowym:

a) 1 011 101 + 100 101
b) 10 110 110 – 100 111
c) 101 011 · 101
d) 110 111 : 101

Zadanie 5.4

Zapisz w systemie:

a) czwórkowym – liczby, które w systemie dziesiątkowym mają postać: 95, 137,
b) trójkowym – liczby, które w systemie dziesiątkowym mają postać: 85, 303,
c) dziesiątkowym – liczby, które w systemie siódemkowym mają postać: 201, 2022,
d) dziesiątkowym – liczby, które w systemie piątkowym mają postać: 342, 1340.

Zadanie 5.5

Oblicz sposobem pisemnym:

a) $(76\ 402)_8 + (2407)_8 =$
b) $(12\ 301)_4 + (333)_4 =$
c) $(4321)_5 - (210)_5 =$
d) $(50\ 012)_7 - (4443)_7 =$
e) $(123)_4 \cdot (32)_4 =$
f) $(642)_9 \cdot (77)_9 =$
g) $(110)_2 : (10)_2 =$

Zadanie 5.6

Zamień liczby:

a) $(1\ 101\ 110)_2$ na liczbę w systemie trójkowym,
b) $(1142)_5$ na liczbę w systemie dwójkowym.

Zadanie 5.7

Uzasadnij, że poniższe zapisy są błędne.

a) $(22\ 024)_4$
b) $(346\ 201\ 822)_6$

Zadanie 5.8

Wskaż, w jakim systemie liczba 121 z systemu dziesiątkowego wynosi 232. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5.9

Jakie reszty możemy uzyskać, dzieląc przez siebie liczby w systemie siódemkowym, a jakie w trójkowym?

Zadanie 5.10

Liczbę 12 078 dziesiątkowego systemu pozycyjnego przedstaw w systemach:

a) trójkowym,
b) szóstkowym,
c) dziesiątkowym,
d) dwunastkowym.

Zadanie 5.11

Liczbę AEF3 podaną w systemie szesnastkowym przedstaw w systemach:

a) trójkowym,
b) piątkowym,
c) ósemkowym,
d) dziesiątkowym.

Wskazówka: w systemie szesnastkowym A = 10, E = 14, F = 15.

Zadanie 5.12

Przedstaw liczby podane w systemie ósemkowym w postaci wielokrotności kolejnych potęg liczby 8.

a) 777,
b) 1375,
c) 22 245,
d) 100 000 077.

6. Liczby dawnych cywilizacji

Zastanawialiście się kiedyś, kto wymyślił liczby i cyfry albo czy zawsze one wyglądały tak jak dzisiaj? Takie pytania, z pozoru błahe, możemy usłyszeć od naszych uczniów. Dlatego warto poruszyć tę tematykę, tym bardziej że liczby, którymi posługujemy się dziś, są stosunkowo młode w porównaniu z tymi, którymi posługiwały się dawne cywilizacje. W tym rozdziale przedstawię kilka „dawnych" liczb i zaproszę czytelników, aby sami spróbowali je zapisać.

Systemy liczbowe, którymi posługiwano się dawniej, korzystały z zupełnie innych znaków, niż robi się to dzisiaj. Co więcej, niektóre z nich nie wykorzystywały zera, bo w ówczesnych czasach nie miało ono takiego znaczenia jak teraz. Jednak zanim przejdziemy do starożytnych sposobów notowania liczb, zatrzymajmy się chwilę przy pojęciu *system liczbowy*.

System liczbowy to zbiór zasad i znaków, za pomocą których zapisujemy liczby i wykonujemy na nich działania (Waliszewski, 1989, s. 271). Ponadto każdy z systemów pozycyjnych posiada tzw. podstawę, którą możemy określić mianem cechy danego systemu, np. podstawą systemu czwórkowego jest 4, ósemkowego 8, a dwunastkowego 12 (o tym mówiliśmy w poprzednim rozdziale). Wśród systemów liczbowych wyróżniamy pozycyjne i addytywne, choć system rzymskim możemy sklasyfikować jako addytywno-pozycyjny, ale o tym w dalszej części tej pracy. W pozycyjnych systemach liczbowych liczby zapisujemy jako ciąg znaków, a każdy z nich ma swoją wartość uzależnioną od pozycji, na której stoi. Weźmy dla przykładu rok kalendarzowy 2022. Jest to ciąg czterech cyfr, a dokładniej 2 i 0. Dwójka stoi na trzech pozycjach i na każdej z nich ma inną wartość. Ta stojąca na pierwszej pozycji oznacza 2 tysiące, a na ostatniej 2 jedności. Inaczej sprawa wygląda w addytywnych systemach liczbowych. Tu wartość przedstawionej liczby jest sumą wszystkich jej znaków. Wśród addytywnych systemów liczbowych wyróżniamy np. hieroglificzny system liczbowy wykorzystywany w starożytnym Egipcie, a do pozycyjnych możemy zaliczyć obecnie wykorzystywany system dziesiątkowy.

Zacznijmy od najdawniejszych śladów notowania liczby pewnych obiektów. Uznaje się, że pierwszy system liczenia pojawił się około 30 000 lat p.n.e. Nazwano go *systemem karbowym*, ponieważ polegał na żłobieniu karbów w kościach upolowanych zwierząt. Jednak system ten jest kłopotliwy dla dużych liczb, na co również znaleziono sposób. Pomysł, który miał ułatwić odczytywanie dużych liczb, polegał na grupowaniu karbów, co humorystycznie zilustrowano na rysunku 13.

Rysunek 13. Graficzna ewolucja systemu karbowego

Źródło: opracowanie własne.

System karbowy zmieniał się z czasem, przyjmując coraz prostszą do odczytu postać. W naszym przykładzie na pierwszej kości za pomocą kresek przedstawiono liczbę 37. Dla ułatwienia odczytów piątą kreskę stawiano pod innym kątem (jak pokazano na następnej kości). Gdy to nie wystarczało, wprowadzono kolejne uproszczenie, polegające na tym, aby co drugą piątkę oznaczać jeszcze inaczej. To w znaczny sposób upraszczało odczytywanie dużych liczb. Jeśli teraz w zapisie karbowym opuścimy zbędne kreski i pozostawimy tylko wyróżnione, to otrzymamy zapis bardzo zbliżony do *rzymskiego systemu liczbowego.*

Źródła twierdzą, że Rzymianie wzorowali się na systemie Etrusków (Krysicki, 1986, s. 35), jednak gdy wprowadzimy w systemie karbowym uproszczenia polegające na odrzuceniu zbędnych kresek, otrzymamy zapis bardzo zbliżony do prezentacji małych liczb w systemie rzymskim, np.

Po odrzuceniu skreślonych kresek otrzymujemy XVI.

W systemie rzymskim dominuje siedem znaków:

I – jeden (1),
V – pięć (5),
X – dziesięć (10),
L – pięćdziesiąt (50),
C – sto (100),
D – pięćset (500),
M – tysiąc (1000).

W ten sposób możemy zapisać liczby od 1 do 3999. Rzymianie jednak posługiwali się również większymi liczbami, dlatego musieli wprowadzić kolejne znaki. Najczęściej tworzono je poprzez dopisanie nad znakiem kreski, np. $\overline{V}$, co oznaczało liczbę 1000 razy większą, a zatem 5000. Stosowano również zapis z pionowymi kreskami, np. |V|, co znaczyło mnożenie wartości znaku przez 100. Używano jeszcze innych symboli, które szybko wyszły z użycia, np. symbol Ɔ oznaczał 5000, a CIↃ liczbę 10 000 (Ciesielski, Pogoda, 2015, s. 28).

W systemie rzymskim znaki notujemy według następujących reguł:

(1) obok siebie możemy zapisać co najwyżej trzy takie same znaki spośród: I, X, C, M,
(2) obok siebie nie możemy umieścić dwóch znaków: V, L, D,
(3) jeśli przed znakiem o wyższej wartości stoi znak o mniejszej wartości (znakami poprzedzającymi mogą być I, X, C), to od większej wartości odejmujemy mniejszą, np. IV – 4, (bo 5 – 1), IX – 9, XL – 40, CD – 900,
(4) jeśli znaki występują w kolejności malejącej, to wartość liczby jest sumą wartości znaków.

Przykłady

- Liczba 1872 w systemie rzymskim ma postać MDCCCLXXII. Kolejno wykonano następujące przekształcenia:

  1872 = 1000 + 800 + 70 + 2 = M + (D + C + C + C) + (L + X + X) + I + I

  po czym wystarczy opuścić nawiasy i znaki +.

- Liczba CDXLIX w dziesiątkowym systemie pozycyjnym ma postać 449. Kolejno wykonano następujące przekształcenia:

  CDXLIX = CD + XL + IX = 400 + 40 + 9 = 449

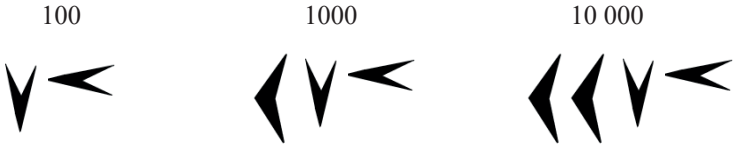
Znaki rzymskie są używane do dziś. Możemy je spotkać w zapisie dat, na tarczach zegarów, w numerach kolejnych tomów ksiąg, w opisie roku produkcji

filmu czy roku budowy domu. Nie są dziś jednak wykorzystywane do obliczeń. Byłoby to zbyt uciążliwe, chociaż Rzymianie za ich pomocą prowadzili żmudne rachunki.

Około cztery tysiące lat przed naszą erą na terenie obecnego Iraku mieścił się kraj zamieszkiwany przez Sumerów. Ich, jak na owe czasy, wysoko rozwinięta kultura wykorzystywała do zapisu liczb tzw. *kliny*. Liczbę 1 zapisywano za pomocą pionowanego klina i tak, grupując kliny, mogliśmy uzyskać liczby do 9. Natomiast do zapisu liczby 10 stosowano dwa połączone kliny.

W taki sposób można było zapisać liczby od 1 do 99, stawiając kliny dziesiątek po lewej, a kliny jedności zapisując po prawej stronie, np. liczba 37 w piśmie klinowym wygląda następująco:

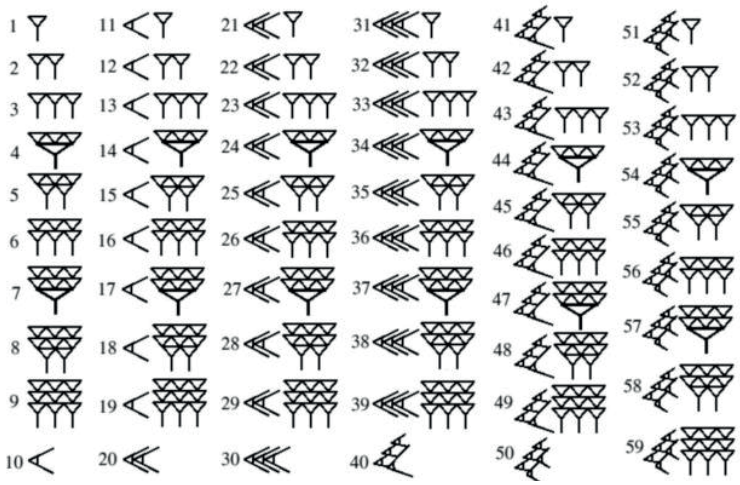
Liczbę 100 Sumerowie zapisywali za pomocą połączenia klina pionowego i poziomego, a kolejne 1000, 10 000 itd. – umieszczając znak liczby 10 przed 100.



Powszechnie uważa się, że Sumerowie posługiwali się najstarszym z dotychczas znanych sposobów zapisywania liczb, który był oparty na liczbie 10 (Krysicki, 1986).

Babilon to jedno z najpotężniejszych państw starożytności. Znajdował się w Azji Mniejszej między rzekami Eufrat i Tygrys. Tam narodził się liczbowy system babiloński wzorowany na sumeryjskim piśmie klinowym. Babilończycy do zapisu liczb używali 59 znaków, a jeśli zaistniała potrzeba wykorzystania zera, to pozostawiali puste miejsce. Podstawą ich systemu liczbowego była liczba 60 (Juszkiewicz, 1975, s. 38 i dalsze).

Rysunek 14. Tablica znaków wykorzystywana przez Babilończyków do zapisywania liczb



Źródło: Światmatematyki.pl, https://swiatmatematyki.pl/index.php?p=145.

Przykład

- Za pomocą znaków babilońskich zapiszemy liczbę, której pierwsza cyfra w zapisie to 24, druga to 3, a ostatnia to 7.

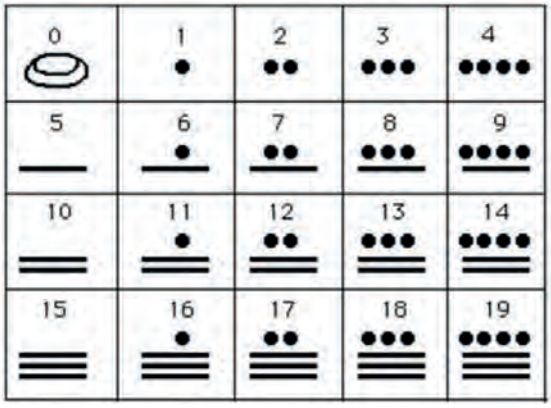
24 3 7

Aby sprawdzić, jaką wartość ma ta liczba w dziesiątkowym systemie pozycyjnym, musimy dokonać następujących obliczeń:

$$24 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60^1 + 7 \cdot 60^0 = 24 \cdot 3600 + 3 \cdot 60 + 7 \cdot 1 = 86\,587$$

Podróżując dalej w poszukiwaniu systemów liczbowych, docieramy do Ameryki Południowej i cywilizacji Majów. Majowie to grupa ludności indiańskiej zamieszkująca tereny obecnie należące do południowo-wschodniego Meksyku, Gwatemali, Belize, Hondurasu i Salwadoru. System liczbowy, którym się posługiwali, był oparty na liczbie 20. Składał się z 20 znaków, które budowano przy użyciu trzech znaków podstawowych, tj. kropki, poziomej kreski i pustej miski (lub zdaniem innych – muszli) (Krysicki, 1986, s. 40, 41).

Rysunek 15. Tablica znaków wykorzystywana przez Majów do zapisywania liczb



Źródło: na podstawie Ciesielski, Pogoda (2015), s. 30.

Przykład

- Przedstawmy sposobem Majów liczbę 457. Tu pojawia się pytanie, skąd wiadomo, jakich znaków użyć. Nie jest to tak oczywiste. Musimy pamiętać, że Majowie posługiwali się dwudziestkowym systemem pozycyjnym. Dlatego przed wyborem znaków z tabeli należy liczbę 457 podaną w dziesiątkowym systemie pozycyjnym zapisać w systemie dwudziestkowym (analogicznie do tego, jak zamienialiśmy liczbę w systemie babilońskim), czyli $457 = 1 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20^1 + 17 \cdot 20^0$. Przy zapisie liczby należy użyć znaków dla 1, 2 i 17, dzięki

czemu – przestrzegając kierunku zapisu od góry do dołu – otrzymujemy liczbę 457, która w systemie Majów ma postać:

Przenieśmy się teraz do starożytnego Egiptu. Najdawniejsze zapisy liczb w systemie egipskim odnaleziono na pomniku z czasów I dynastii (około 3300 lat p.n.e) oraz w papirusie Ahmesa[1] odnalezionym w Tebach. Liczby w systemie egipskim zapisywano za pomocą hieroglifów od lewej do prawej. Aby zapisać daną liczbę, powtarzano znaki, a ich wartości sumowano. Egipcjanie nie znali zera, a podstawą ich systemu była liczba 10 (Krysicki, 1936, s. 30).

Rysunek 16. Tablica znaków wykorzystywana przez Egipcjan do zapisywania liczb

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7

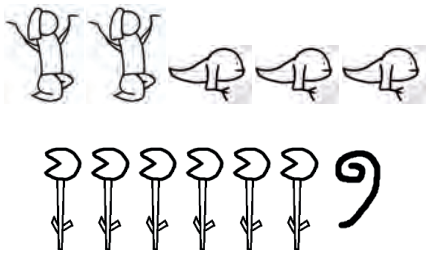
Źródło: na podstawie Krysicki (1986).

Przykłady

- Liczba 2022 zapisana za pomocą hieroglifów.

[1] Papirus Ahmesa, zwany papirusem Rhinda (od nazwiska odkrywcy Alexandra Henry'ego Rhinda (1833–1863)) jest jednym z najstarszych znanych dokumentów matematycznych. Zawiera przykłady rozwiązań problemów matematycznych z algebry i geometrii. Jego wiek datuje się na XVII wiek p.n.e.

× Liczba 2 306 100 zapisana za pomocą hieroglifów.



Oczywiście nie są to wszystkie systemy liczbowe starożytnych cywilizacji. Zainteresowanego czytelnika odsyłam do literatury z zakresu historii matematyki, gdzie będzie mógł poszerzyć swoją wiedzę.

6.1. Zadania – liczby dawnych cywilizacji

Zadanie 6.1

Zapisz w systemie rzymskim następujące liczby: 34, 65, 237, 999, 2021, 2494.

Zadanie 6.2

Liczby podane w systemie rzymskim zapisz w dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

a) MCDXCII,
b) CMXLV,
c) CDXCIX,
d) LXXVI.

Zadanie 6.3

Zapisz w systemie rzymskim rok swoich urodzin oraz rok, w którym będziesz obchodził 63 urodziny.

Zadanie 6.4

Zapisz liczby cyframi arabskimi, a następnie wykonaj działania. Wynik obliczeń podaj w systemie rzymskim.

a) XL + LXX + LXXI
b) CCLXVI – CXXXII
c) CDLVI : LVII
d) CDX · XXV : CCL

Zadanie 6.5

Zapisz za pomocą hieroglifów liczby podane w dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

a) 381,
b) 6957,
c) 1 111 113.

Zadanie 6.6

Zapisz za pomocą cyfr babilońskich liczby, w których:

a) pierwsza cyfra to 3, druga to 29,
b) pierwsza cyfra to 1, druga to 5, trzecia to 38.

Przedstaw każdą z nich w dziesiątkowym systemie pozycyjnym w postaci sumy iloczynów potęg liczby 10 i liczb mniejszych od 10.

Zadanie 6.7

Wypisz wszystkie możliwe cyfry systemu Majów, które możemy zbudować, mając do dyspozycji dwa patyki i trzy kamienie.

Zadanie 6.8

Odczytaj liczby zapisane w systemie Majów. Zapisz każdą z nich w dziesiątkowym systemie pozycyjnym.

a)

b)

Zadanie 6.9

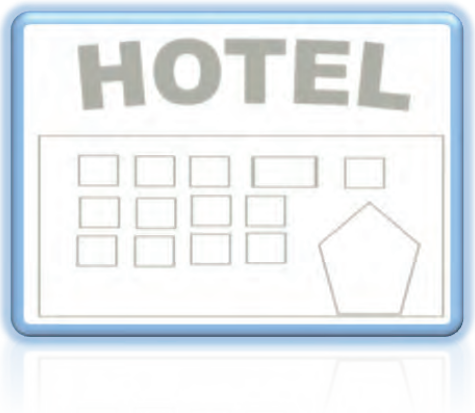
Zapisz za pomocą znaków Majów liczby 156 oraz 254.

Zadanie 6.10

Wybierz dwie dowolne liczby trzycyfrowe i zapisz je:

a) w systemie rzymskim,
b) za pomocą hieroglifów,
c) w systemie Majów,
d) w systemie babilońskim.

7. Paradoks Hilberta



Wyobraźmy sobie hotel z nieskończoną liczbą pokoi. Przyjmijmy, że znajdują się w nim tylko pokoje jednoosobowe ponumerowane 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, … Recepcjonista hotelu, Pan Tomek, przydziela pokoje gościom i wręcza im klucze. W pewnym momencie okazuje się, że wszystkie pokoje są zajęte, czyli aktualnie w hotelu mamy nieskończoną liczbę gości. Nagle w drzwiach hotelu pojawia się nieoczekiwany gość, dla którego pan Tomek koniecznie musi znaleźć pokój. Recepcjonista po krótkim namyśle wpadł na pomysł, by gościa z pokoju nr 1 przenieść do pokoju nr 2, gościa z pokoju nr 2 przenieść do pokoju nr 3 itd. W ten sposób pan Tomek ulokował przybyłego gościa w pokoju numer 1. Zresztą nie byłoby różnicy, gdyby ostatni gość przybył w towarzystwie trzech kolegów. Wówczas pomysł pana Tomka również by się sprawdził, bo gości z pokoi 1, 2, 3 i 4 przeniósłby do pokoi 5, 6, 7, i 8, zaś gości z pokoi 5, 6, 7, i 8 do pokoi 9, 10, 11 i 12 itd. Każdy z gości miałby swój pokój.

Następnego dnia sytuacja skomplikowała się jeszcze bardziej. Do pełnego po brzegi hotelu przybyło nieskończenie wielu gości, którym pan Tomek musiał przydzielić pokoje. Zastanawiał się przez dłuższą chwilę, po czym postanowił, że gościa z pokoju 1 umieści w pokoju 2, z pokoju 2 w pokoju 4, z pokoju 3 w pokoju 6, z pokoju 4 do pokoju 8 itd. Pomysł pana Tomka polegał na tym, aby gości z pokoi o numerach porządkowych n umieścić w pokojach z numerami 2n. W ten sposób zwolnił wszystkie pokoje, które miały nieparzysty numer. Wiemy, że liczb nieparzystych jest nieskończenie wiele, zatem wszyscy goście otrzymali pokoje.

Zastanówmy się teraz, co się stanie, gdy goście zaczną opuszczać hotel. Załóżmy, że gość z pokoju 7 postanowi opuścić hotel. Wtedy nasz sprytny recepcjonista przeniesie gościa z pokoju 8 do 7, z 9 do 8, z 10 do 9 itd. Tym sposobem w hotelu znów będzie komplet gości, czyli wszystkie pokoje – a przypominam, że jest ich nieskończenie wiele – będą zajęte. A co w sytuacji, gdyby hotel postanowiło nagle opuścić nieskończenie wielu gości? Myślę, że pan Tomek i z tą sytuacją by sobie poradził, wykonując operacje przemieszczeń gości w pokojach odwrotne do tych, których dokonał, gdy do hotelu przybyło w jednej chwili nieskończenie wielu gości. Okazałoby się, że hotel nadal jest pełen gości (Sporer, 1987, s. 113).

Odpowiedzi do wybranych zadań

Zadania z rozdziału pierwszego

Zadanie 1.2

a) P; b) P; c) F; d) F; e) P; f) P; g) F; h) F

Przykłady zdań prawdziwych:
(1) W pętli znajdują się wszystkie prostokąty.
(2) W pętli znajdują się wszystkie małe trójkąty.

Przykłady zdań fałszywych:
(1) Poza pętlą znajdują się tylko nieokrągłe figury.
(2) Poza pętlą znajdują się małe koła i małe trójkąty.

Niestety, nie uda się zmienić tak układu figur, aby zdania prawdziwe zmieniły się w fałszywe i odwrotnie. Wynika to ze zdań d i h. Zdania te wzajemnie się wykluczają.

Zadanie 1.3

a, e, f, h, i nie są zdaniami logicznymi

Zadanie 1.4

Zdania prawdziwe: e, h, zdania fałszywe: a, b, c, d, f, g.

Zadanie 1.5

a) $(\sim p) \Rightarrow (q \vee s)$
b) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim s)$
c) $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge q)$
d) $(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge q]$
e) $(\sim p) \Rightarrow (q \vee r)$

Zadanie 1.6

c)

Zadanie 1.7

d)

Zadanie 1.8

Gdy z matematyki lub języka polskiego nie uzyska oceny bardzo dobrej.

Zadanie 1.9

Gdy z matematyki i języka polskiego nie uzyska oceny bardzo dobrej.

Zadanie 1.10

Prawami rachunku zdań są: a, b.

Zadanie 1.12

b)

Zadanie 1.13

a) Nieprawda, że pójdę do filharmonii i nieprawda, że pójdę do teatru.
b) Nieprawda, że mam odrobione zadanie domowe z matematyki lub mam odrobione zadanie domowe z fizyki.
c) Nieprawda, że mam 22 lata lub nieprawda, że mieszkam w Gdańsku.

Zadanie 1.14

d)

Zadanie 1.15

a)

Zadanie 1.16

a) $a = -2$; b) $z = 1$; c) $y = 10$; d) $t = 7$ (uwaga, to nie są jedyne możliwe liczby)

Zadanie 1.17

a) prawda; b) prawda

Zadanie 1.22

prawda

Zadania z rozdziału drugiego

Zadanie 2.3

a) nie ma
b) Ø
c) 2, 3, 4
d) 2, {3}
e) 0, Ø, {Ø}
f) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Zadanie 2.5

a) 25, 26, 27, 28, 29, 30
b) 1, 2, 3, 4, 5
c) 5, 10, 15, 20, 25, 30
d) 10, 11, 12, 13, …, 24
e) Ø

Zadanie 2.6

B = C, bo każdy element z B należy do C i odwrotnie.

Zadanie 2.13

a) $\subset$; b) $\in$; c) $=$; d) $\subset$

Zadanie 2.14

a) F; b) P; c) P; d) F; e) P; f) P; g) P; h) P

Zadanie 2.15

Żadnego języka obcego nie zna 29 naukowców.

Zadanie 2.16

b)

Zadanie 2.17

a) P; b) F; c) P; d) P

Zadanie 2.18

a) czworokąty; b) wielokąty; c) równoległoboki; d) czworokąty

Zadanie 2.19

A\B = {a}, B\A = {d}

Zadanie 2.21

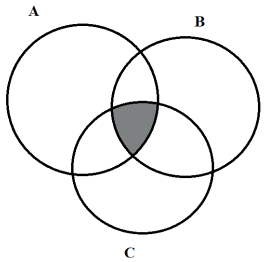
a) {1, 2, 4, 6, 8}; b) C; c) {1, 2, 3, 4, 7}; d) {2, 4}, e) Ø

Zadanie 2.22

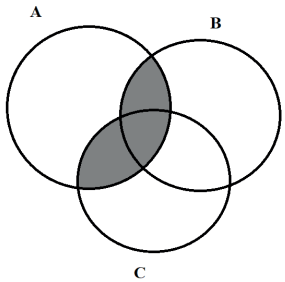
d)

Zadanie 2.23

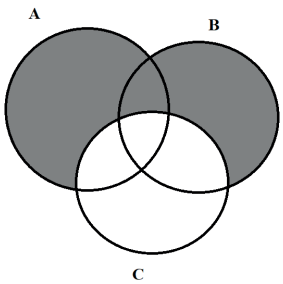
a)



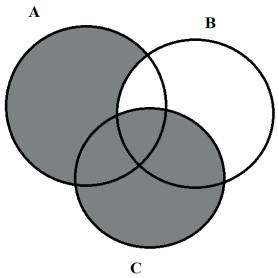
b)



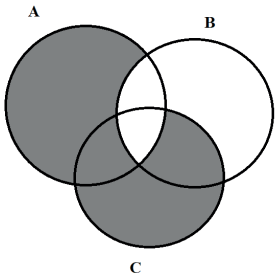
c)



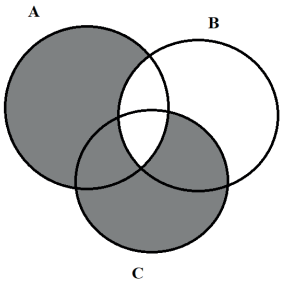
e)



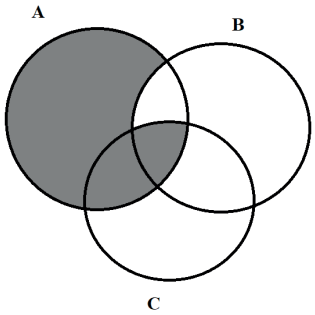
f)



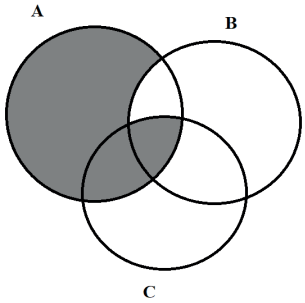
g)



d)



h)



Zadanie 2.25

a) {5}; b) {x}; c) {c}; d) {2, 4}

Zadania z rozdziału trzeciego

Zadanie 3.3

a) {(a, a)}; b) Ø; c) {(Ø, a)}

Zadanie 3.6.

a) {(1, 2), (1, 3)}
b) {(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)}
c) Ø
d) {(1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5)}
e) {(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)}
f) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)}

Zadanie 3.8

a) 2; b) 4; c) 32

Zadanie 3.10

Każdej liczbie przyporządkowano jej czterokrotność, $f(x) = 4x$

Zadanie 3.12

a) $f(x) = x + 2$; b) $f(x) = 2x$; c) $f(x) = 2x - 1$

Zadanie 3.13

a) $D_f = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a\}$
b) $D_f = \{\square, \Delta, O\}$, $Y = \{\square, \Delta, O\}$
f) $D_f = \{\square, \Delta, O\}$, $Y = \{O, ☺, ◺\}$

Zadanie 3.14

$g(a) = x$
$g(b) = b + 5$
$g(c) = b + 2$
$D = \{a, b, c, x\}$
$D^{-1} = \{x, 2, b + 2, y, b + 5\}$
$Y = \{x, 2, b + 2, b + 5\}$

Zadanie 3.20.

a) $f(n) = n - 5$, $D = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N} \cup \{-5, -4, -3, -2, -1\}$

Zadania z rozdziału czwartego

Zadanie 4.2

a) 4 021 005; b) 8008

Zadanie 4.3

1 023 456 – milion dwadzieścia trzy tysiące czterysta pięćdziesiąt sześć

Zadanie 4.4

a) $3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
b) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
c) $1 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Zadanie 4.5

a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
b) 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28
c) 1, 4, 9, 16, 25
d) 1, 8, 27;
e) 5, 10, 15, 20, 25

Zadanie 4.6

a) 1014, 1299, 2025, 5508, 6099, 8244
b) 1014, 5508, 824
c) 3440
d) 5508, 8244

Zadanie 4.7

$12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = 1 \cdot 12$

Zadanie 4.8

$348 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 29$

Zadanie 4.9

8

Zadanie 4.12

$10 = 3 + 7$

Zadanie 4.14

5

Zadanie 4.19

2, 3, 4, 5, 6, 7

Zadanie 4.21

$5 \cdot 13 + 4$

Zadanie 4.24

Skoro liczba ma być podzielna przez 15, to jest podzielna przez 3 i 5. Suma cyfr naszej liczby wynosi 6, zatem liczba jest podzielna przez 3. Ponadto cyfra jedności naszej liczby to 5, zatem liczba jest podzielna przez 5. Stąd wynika, że liczba jest podzielna przez 15.

Zadanie 4.31

b)

Zadanie 4.32

c)

Zadanie 4.33

c)

Zadanie 4.34

c)

Zadanie 4.35

a)

Zadanie 4.36

d)

Zadanie 4.37

a) 559, przemienność i łączność dodawania
b) 278, łączność dodawania
c) 640, łączność mnożenia
d) 700, przemienność i łączność mnożenia
e) 242, przemienność i łączność dodawania
f) 3700, przemienność mnożenia
g) 187, rozdzielność mnożenia względem dodawania
h) 2277, rozdzielność mnożenia względem odejmowania
i) 3876, rozdzielność mnożenia względem dodawania
j) 1700, rozdzielność mnożenia względem dodawania
k) 400, rozdzielność mnożenia względem dodawania

Zadanie 4.38

a) 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88
b) 51, 68, 85, 102, 119, 136
c) 112, 140, 168, 196, 224, 252, 280, 308
d) 504, 576, 648, 720, 792, 864, 936

Zadanie 4.40

(999 – 99) : 12 = 75

Zadanie 4.41

a) $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$
b) $D_{78} = \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$
c) $D_{512} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$
d) $D_{4 \cdot 6} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Zadanie 4.48

b)

Zadanie 4.49

250

Zadanie 4.56

c)

Zadanie 4.57

c)

Zadanie 4.58

d)

Zadanie 4.59

a) 26; b) 2; c) 120; d) 176

Zadanie 4.60

c)

Zadanie 4.63

$A \times B = \{(\alpha, a), (\alpha, b), (\alpha, c), (\alpha, d), (\beta, a), (\beta, b), (\beta, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\gamma, b), (\gamma, c), (\gamma, d)\}$,
$k(A) = 3$, $k(B) = 4$, $k(A \times B) = 12$

Zadania z rozdziału piątego

Zadanie 5.1

a) 81; b) 683; c) 475; d) 55

Zadanie 5.2

a) $(1\ 001\ 110)_2$
b) $(100\ 101\ 000)_2$
c) $(1\ 011\ 101\ 100)_2$
d) $(101\ 000\ 000\ 100)_2$

Zadanie 5.3

a) 10 000 010
b) 10 001 111
c) 11 010 111
d) 1011

Zadanie 5.4

a) $(1133)_4$, $(2021)_4$
b) $(10\ 011)_3$, $(102\ 020)_3$
c) 99, 702
d) 97, 220

Zadanie 5.6

a) $(11\ 002)_3$
b) $(10\ 101\ 100)_2$

Zadanie 5.7

a) w zapisie liczby występuje 4
b) w zapisie liczby występuje 6 i 8

Zadanie 5.8

system siódemkowy

Zadanie 5.10

a) $(121\ 120\ 100)_3$
b) $(131\ 530)_6$
c) $(17\ 510)_9$
d) $(6BA6)_{12}$

Zadanie 5.11

a) $(2\ 021\ 102\ 210)_3$
b) $(2\ 413\ 122)_5$
c) $(127\ 363)_8$
d) $(44\ 787)_{10}$

Zadania z rozdziału szóstego

Zadanie 6.1

XXXIV; LXV; CCXXXVII; CMXCIX; MMXXI; MMCDXCIV

Zadanie 6.2

a) 1492; b) 945; c) 499; d) 76

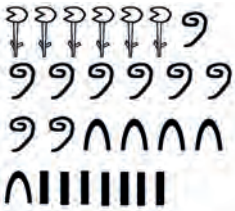
Zadanie 6.4

a) CLXXXI; b) CXXXIV; c) VIII; d) XLI

Zadanie 6.5

a)

b)



c)

Zadanie 6.6

a)

Zadanie 6.8

a) $1 \cdot 20^1 + 3 \cdot 20^0 = 20 + 3 = 23$
b) $19 \cdot 20^1 + 5 \cdot 20^0 = 380 + 5 = 385$

Bibliografia

Bobiński, Z., Jędrzejewicz, P., Jarek, P. (2011). *Zadania logiczne*. Toruń: Wydawnictwo Aksjomat.

Ciesielski, K., Pogoda, Z. (2015). *Wielka księga zagadek. Matematyczna bombonierka*. Warszawa: Demart.

Davis, P.J., Hersh, R. (1994). *Świat matematyki*. Warszawa: PWN.

Duda, R. (2012). Uwagi o materii matematycznej i roli pojęć matematycznych. *Filozofia Nauki*, 20 (3): 83–98.

Juszkiewicz, A.P. (red.) (1975). *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początków XIX stulecia.* T. 1: *Od czasów najdawniejszych do początków czasów nowożytnych*. Warszawa: PWN.

Juszkiewicz, A.P. (red.) (1976). *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początków XIX stulecia.* T. 2: *Matematyka XVII stulecia.* Warszawa: PWN.

Juszkiewicz, A.P. (red.) (1977). *Historia matematyki. Od czasów najdawniejszych do początków XIX stulecia.* T. 3: *Matematyka XVIII stulecia.* Warszawa: PWN.

Kaczmarczyk, J. (1983). *Logika matematyczna w nauczaniu początkowym*. Warszawa: WSiP.

Krysicki, W. (1964). *Tajemnice liczb*. Warszawa: Nasza Księgarnia.

Krysicki, W. (1986). *Jak liczono dawniej, a jak liczymy dziś.* Warszawa: Nasza Księgarnia.

Kucharczyk, S. (1991). *Podstawy nauczania początkowego matematyki. Wybór zadań*. Warszawa: WSiP.

Moroz, H., Wojnowska, M. (1993). *Matematyczne malowanki rozwijające zdolności uczniów. Klasa 0 i klasa 1.* Warszawa: Oficyna Wydawnicza Alma-Press.

Nowecki, B. (red.) (1973). *Materiały pomocnicze do nauczania matematyki w szkole podstawowej. Wykłady telewizyjne.* Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Rasiowa, H. (2003). *Wstęp do matematyki współczesnej.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Sawicki, T., Reclik, R., Nowik, J. (1997). *Matematyka. To nauczyciel klas początkowych wiedzieć powinien*. Opole: Wydawnictwo NOWIK.

Semadeni, Z. (1979). *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci.* Warszawa: PWN.

Semadeni, Z. (1981). *Nauczanie początkowe matematyki*. T. 1. Warszawa: WSiP.

Semadeni, Z. (1984). *Nauczanie początkowe matematyki*. T. 2. Warszawa: WSiP.

Skorupka, S., Anderska, H., Łempicka, Z. (1969). *Mały słownik języka polskiego.* Warszawa: PWN.

Sołoducha, I. (1986). *Materiały pomocnicze do przedmiotu podstawy nauczania matematyki.* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Sporer, Z. (1987). *Och, ta matematyka.* Warszawa: Nasza Księgarnia.

Trzęsicki, K. (2008). *Logika. Nauka i sztuka*. Białystok: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania.

Waliszewski, W. (red.) (1989). *Encyklopedia szkolna. Matematyka.* Warszawa: WSiP.

Akty prawne

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. z 2017 r., poz. 356).

Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 25 lipca 2019 r. w sprawie standardu kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela (Dz.U. z 2019 r., poz. 1450 z późn. zm.).

Źródła internetowe

Jaszczuk-Surma, M. *Zarys historii matematyki BABILOŃSKIEJ.*
Pobrano z: https://www.swiatmatematyki.pl/index.php?p=145 (28.09.2022 r.).

O'Connor, J.J., Robertson, E.F. *Matematyka majów.*
Pobrano z: https://www.swiatmatematyki.pl/index.php?p=131 (28.09.2022 r.).

Tarski, A. (2012). *Wprowadzenie do logiki*. Warszawa: PHILOMATH.
Pobrano z: https://www.calculemus.org/tarski-wprowadzenie/tarski.pdf (25.08.2022 r.).

Spis rysunków i tabel

Rysunek 1.	Przykładowe pociągi	17
Rysunek 2.	Przykładowa „tablica semaforów” i semafory	17
Rysunek 3.	Układ torów wraz z przykładowym ustawieniem semaforów	18
Rysunek 4.	Jednotorowy schemat trasy pociągów	20
Rysunek 5.	Tablice semaforów dla jednotorowej trasy pociągów	21
Rysunek 6.	Reprezentacje graficzne zbiorów	44
Rysunek 7–9.	Graficzne relacje między zbiorami	47
Rysunek 10.	Inkluzja trzech zbiorów	51
Rysunek 11.	Interpretacja graficzna zbiorów liczbowych	67
Rysunek 12.	Zestaw kart logicznych „Wielkanocne pisanki”	75
Rysunek 13.	Graficzna ewolucja systemu karbowego	159
Rysunek 14.	Tablica znaków wykorzystywana przez Babilończyków do zapisywania liczb	162
Rysunek 15.	Tablica znaków wykorzystywana przez Majów do zapisywania liczb	163
Rysunek 16.	Tablica znaków wykorzystywana przez Egipcjan do zapisywania liczb	164

Tabela 1. Zdania logiczne i ich wartości 12

Tabela 2. Operatory logiczne 13

Tabela 3. Wartości logiczne wybranych zdań złożonych 26

Tabela 4. Zastosowanie metody zero-jedynkowej do oceny prawdziwości zdania złożonego 28

Tabela 5. Przykłady par uporządkowanych dla zbiorów A, B 85

Tabela 6. Możliwe wybory strojów karnawałowych trzech dziewcząt 90

Tabela 7. Wybory strojów karnawałowych trzech dziewcząt z ostatnich dwóch lat 90

Tabela 8. Wybrane cechy podzielności liczb 130

Tabela 9. Sito Eratostenesa 132

Tabela 10. Dziesiątkowy system pozycyjny 135

Głównym celem tego opracowania jest pogłębienie wiadomości i umiejętności matematycznych studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej oraz dostarczenie przykładów, które po niewielkich modyfikacjach można wykorzystać na zajęciach z edukacji matematycznej w szkole. Chciałabym, aby inspiracje do tworzenia ciekawych lekcji matematyki znaleźli w niej również nauczyciele czynnie pracujący w zawodzie. Prowadząc czytelników przez kolejne strony, starałam się, aby poszczególne rozdziały rozpoczynały się od opisu kontekstów, w których ludzie mogli poczuć potrzebę dokonywania matematyzacji. Rozwiązaniem, które w założeniu ma ułatwić lekturę książki, jest układ treści. Łączy on to, co czytelnik poznał dotychczas, z tym, co dla niego może okazać się nowe. Zależało mi, aby sposób eksponowania treści porządkował dotychczasową wiedzę i uzupełniał ją o nowe spostrzeżenia.

WYDAWNICTWO NAUKOWE US

71-101 Szczecin, ul. Mickiewicza 64
tel. 91 444 20 06, 91 444 20 09
e-mail: wydawnictwo@usz.edu.pl
www.wn.usz.edu.pl

ISBN 978-83-7972-636-3 (online)
ISBN 978-83-7972-635-6 (print)

9 788379 726356