



LIDIA PAWLUSIŃSKA

KIEROWANE ODKRYWANIE
MATEMATYKI
WE WCZESNEJ EDUKACJI

Kierowane odkrywanie matematyki we wczesnej edukacji

UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
ROZPRAWY I STUDIA T. (MCCCXII) 1238

Lidia Pawłusińska

Kierowane odkrywanie matematyki
we wczesnej edukacji

Szczecin 2021

*Prawdziwym zadaniem nauczyciela nie jest dostarczanie odpowiedzi,
ale stymulowanie pytań i zachęcanie do samodzielnych poszukiwań*

Albert Einstein

Rada Wydawnicza

Tomasz Bernat, Anna Cedro, Urszula Chęcińska, Maciej Kowalewski
Ewa Mazur-Wierzbicka, Jarosław Nadobnik, Grzegorz Wejman
Renata Ziemińska, Magdalena Zioło
Andrzej Skrendo – przewodniczący Rady Wydawniczej
Elżbieta Zarzycka – dyrektor Wydawnictwa Naukowego

Recenzent

dr hab. Alina Kalinowska-Iżykowska, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski

Lidia Pawlusińska ORCID 0000-0003-0311-9755

Redakcja językowa

Joanna Sygit

Korekta

Małgorzata Szczęsna

Skład komputerowy

Maciej Umiastowski

Projekt okładki

Raraku.pl



Wersja elektroniczna publikacji dostępna na licencji CC BY-SA 4.0

© Copyright by Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2021

DOI 10.18276/978-83-7972-784-1

ISBN 978-83-7972-784-1 (online)

ISBN 978-83-7972-515-1 (print)

ISSN 0860-2751

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIwersYTETU SZCZECIŃSKIEGO

Wydanie I. Ark. wyd. 9,0. Ark. druk. 10,0. Format B5.

Spis treści

Wprowadzenie	9
1. Psychopedagogiczne podstawy poznania matematycznego	15
1.1. Zarys psychologicznych koncepcji rozwoju człowieka	16
1.2. Możliwości poznawcze dziecka w zakresie matematyki	25
1.2.1. Zmiany w sferze poznawczej	26
1.2.2. Zmiany w sferach emocjonalnej, fizyczno-motorycznej i społecznej	31
1.3. Oczekiwania formułowane wobec edukacji matematycznej	34
1.4. Wymagania konstruktywistycznego podejścia do nauczania matematyki	41
2. Odkrywanie matematyki drogą zdobywania wiedzy	51
2.1. Odkrywanie a rozwijanie myślenia matematycznego	53
2.1.1. Odkrywanie a operacje myślowe	55
2.1.2. Odkrywanie a reguły myślenia	59
2.1.3. Odkrywanie a typy rozumowań	68
2.1.4. Odkrywanie jako twórczość dziecka	71
2.2. Odkrywanie a kształtowanie pojęć matematycznych	73
2.3. Odkrywanie regularności, dostrzeganie prawidłowości i budowanie własnych strategii rozwiązywania	84
2.4. Dziecięce zmagania z odkrywaniem regularności matematycznych w świetle badań	90

3. Nauczanie skierowane na odkrywanie matematyki.....	93
3.1. Teoretyczne podstawy nauczania skierowanego na odkrywanie	94
3.2. O konstrukcji lekcji w nauczaniu skierowanym na odkrywanie	98
3.3. Możliwości edukacyjne i trudności organizacyjne nauczania skierowanego na odkrywanie	109
3.4. Przykłady zajęć matematycznych wraz z komentarzem	114
Zamiast podsumowania	141
Bibliografia	143
Summary	159

Wprowadzenie

Matematyka – jako jedna z najbardziej jednoznacznych dziedzin wiedzy, ustrukturyzowana i połączona w logiczną całość – w przestrzeni swoich rozważań umieszcza abstrakcyjne obiekty opisane charakteryzującymi je własnościami. Niestety potocznie kojarzona jest z rachunkami szkolnymi, rysunkami geometrycznymi i ogromną liczbą schematów umożliwiających rozwiązywanie zadań, zazwyczaj typowych. Taki sposób postrzegania uwypukla jej niewłaściwe pojmowanie oraz wskazuje na prawdopodobne złe doświadczenia szkolne z nią związane.

Uwarunkowana kulturowo potrzeba posługiwania się matematyką wymusza na nas konieczność korzystania z jej dorobku. Jednak mimo swojej powszechności ma niestety więcej przeciwników niż zwolenników. Często możemy usłyszeć: *Ach ta matma! Ja nie lubię matematyki! Matematyka jest trudna. Ja nigdy nie wiedziałem(-łam) o co chodzi na matematyce.* Z drugiej strony dają się słyszeć głosy przekonujące nas o wadze matematyki, jej zbawiennym wpływie na rozwój logicznego myślenia czy niezbędności istnienia w zakresie kompetencji wykształconego człowieka. Do dziś panuje powszechny pogląd, że matematyczne sukcesy świadczą o wysokiej inteligencji. Dwa funkcjonujące obok siebie poglądy na matematykę uwypuklają podział na oponentów wszelkiego poznania matematycznego i sympatyków każdej myśli z nią związanej. Potocznie słyszymy, że całe społeczeństwo możemy podzielić na „humanistów” i „umysł ścisły”. Czy rzeczywiście tak jest? Przywołany stereotyp często wykorzystuje się w celu usprawiedliwienia niskich kompetencji matematycznych. Określiłabym go mianem mitu, ponieważ przy przeciętnych możliwościach poznawczych i w odpowiednio zorganizowanym środowisku matematyki szkolnej może nauczyć się każdy.

Nieformalna edukacja matematyczna rozpoczyna się bardzo wcześnie. Dzieci doświadczają jej jeszcze przed rozpoczęciem zorganizowanej nauki szkolnej. Doświadczenia te są związane z posługiwaniem się małymi liczbami, rozpoznawaniem kształtów czy porządkowaniem obiektów. Wszystkie te czynności zdają się być dla dzieci naturalne z racji tego, że spotykają się z nimi chociażby podczas rozmów między dorosłymi, z dorosłymi, a także w gronie rówieśników. Obecność matematyki w naszej kulturze jest nie tyle uzasadniona, co przybiera formę stałego, naturalnego elementu naszego życia. I tak, to co początkowo dzieciom wydaje się naturalne, poprzez szkolną formalizację staje się trudne, odległe i często bywa źródłem wielu trudności związanych z tą piękną dziedziną wiedzy.

Kształcenie umiejętności matematycznych, różnie postrzegane na przestrzeni lat, mocno zwraca się w kierunku aktywności własnej dziecka. Uczenie się matematyki jako rozumne budowanie własnych struktur umysłowych powinno stanowić podstawę praktyki edukacyjnej. Wood, rozważając kwestie dotyczące dziecięcych trudności w uczeniu się matematyki, zwraca uwagę na badania przeprowadzone przez Nunes i Bryant, na podstawie których wywnioskowano, że dzieci są gotowe do uczenia się matematyki w szkole, i ustalono, że dysponują pewnym rozumieniem pojęć matematycznych już przed tym, zanim zostaną formalnie ich nauczone (Wood, 2006). Wskazuje to, że przyczyną trudności pojawiających się w uczeniu matematyki może być złe nauczanie, co potwierdzają spostrzeżenia Jeana Piageta. Jego śmiała autorska hipoteza mówi, że niepowodzeń szkolnych w zakresie przedmiotów ścisłych powinniśmy dopatrywać się w nauczaniu, które nie sprzyja rozwojowi uczniów. Badacz twierdzi, że wśród przyczyn tych nadmiernych trudności znajduje się brak zrozumienia sposobu nauczania, nie zaś nauczanych treści (Piaget, 1977a). Drugą istotną kwestią podnoszoną w nauczaniu matematyki jest konieczność odwoływania się do dotychczasowych doświadczeń dziecka oraz przyjęcie założenia, że matematyka nie składa się z kawałków, lecz jest ciągłą, spójną i hierarchiczną strukturą. Posługuje się własnym językiem, a ubrana w abstrakcyjne pojęcia stanowi ogromne wyzwanie, któremu muszą sprostać i uczniowie, i nauczyciele.

Rodzi się zatem pytanie: *W jaki sposób nauczyciele powinni aktywnie wspierać dziecko podczas rozwiązywania problemów i tworzenia konstrukcji pojęciowych w zakresie matematyki?* Poszukiwania odpowiedzi trwają bezustannie. Wiemy jednak, że nauczyciele powinni koncentrować się na przekształcaniu spontanicznej aktywności dziecka w działalność skoncentrowaną na celu (Wygotski, 1978), wspierać rozwój myślenia dziecka (Bruner, 1978), a także celować działaniami dydaktycz-

nymi w strefę najbliższego rozwoju dziecka (Wygotski, 2002). Ważne jest, aby umożliwiać uczniom badanie i eksperymentowanie, zaniechać zbyt pośpiesznego przechodzenia od struktury jakościowej omawianych zagadnień do bezpodstawnie szybkiego wprowadzania stosunków liczbowych i praw ilościowych oraz bardzo mocno akcentować uczenie się jako proces prowadzący do odkrywania praw i reguł funkcjonujących w matematyce (Bruner, 1978). Mimo upływu czasu, zalecenia dla organizacji warunków sprzyjających rozwojowi kompetencji matematycznych zdają się być nadal aktualne i co więcej – nadal w niewielkim stopniu realizowane we współczesnej praktyce edukacyjnej. Mówią o tym chociażby trudności, których uczniowie doświadczają, a które ujawniają się m.in. w międzynarodowych badaniach kompetencji matematycznych TIMSS¹ czy PISA².

Jak podkreśla Zofia Krygowska, przewodnią zasadą w nauczaniu matematyki jest zasada „aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie nauczania” (Krygowska, 1977a, s. 3). Autorka zasadę tę uznaje za nieodzowny warunek realizacji zadań szkoły w zakresie kształcenia matematycznego, uzasadniając, że wykorzystanie nawet najbardziej atrakcyjnych i nowoczesnych metod nauczania czy pomocy dydaktycznych nie zagwarantuje nam uczenia się uczniów. Na pierwszy plan w procesie kształcenia wysuwa się zatem konieczność zabiegania o rozwój aktywności uczniowskiej i uznanie jej za jeden z głównych celów kształcenia matematycznego uczniów, także we wczesnej edukacji. To ona, zdaniem Krygowskiej, pozwala na systematyczne utrwalanie materiału nauczania oraz decyduje o rezultatach tego procesu (Krygowska, 1977a). Jako że uczenie się matematyki jest procesem skomplikowanym i w większości przypadków trudnym do samodzielnej realizacji, warto w edukacji matematycznej podjąć trud nauczania uczniów uczenia się matematyki. Uczenie się matematyki możemy rozważać z kilku perspektyw. Pierwsza to przyjmowanie i asymilowanie informacji przekazywanych przez nauczyciela lub pochodzących z różnych źródeł, tj. podręczników szkolnych, opracowań naukowych i popularyzujących matematykę czy z funkcjonujących na różnych etapach kształcenia kompendiów wiedzy. Druga to wykorzystanie zgromadzonych informacji do rozwiązywania zadań o charakterze ćwiczeniowym lub nowych, których rozwiązanie niesie z sobą kolejne informacje. Mamy jeszcze trzecią możliwość, czyli odkrywanie wiedzy

¹ TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) – Międzynarodowe Badanie Wyników Nauczania Matematyki i Nauk Przyrodniczych.

² PISA (*Programme for International Student Assessment*) – Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów.

matematycznej, tj. subiektywnie nowych pojęć, twierdzeń i metod wykreowanych w trakcie twórczej działalności matematycznej przez samego ucznia lub rówieśników w trakcie zajęć. Wiemy, że tak wyróżnione przez Krygowską elementy zdobywania wiedzy matematycznej przeplatają się ze sobą w toku kształcenia. Jednak to, na co chciałabym zwrócić uwagę, wiąże się właśnie z ostatnim elementem, czyli odkrywaniem w toku uczenia się matematyki.

Odkrywanie matematyki, któremu poświęcono niniejsze opracowanie, nie jest rozpatrywane w obszarze spontanicznego działania uczniów. Wiążę je ze ściśle określonymi przez podstawę programową kształcenia ogólnego celami nauczania, gdyż w sytuacji, w której nie ustalono *a priori* zakresu treści matematycznych i nie określono listy wymagań edukacyjnych, odkrywanie matematyki mogłoby się ograniczać do zaspokajania naturalnej ciekawości poznawczej dziecka, jednak tylko w granicach sytuacji realnych, czyli tych, w których znalazło się dziecko. Wiedząc, że uwarunkowania środowiskowe, doświadczenia dziecka oraz jego potrzeby edukacyjne są zróżnicowane, nie możemy oczekiwać, że osiągnięcie pewnego poziomu znajomości matematyki w całej populacji jest oczywiste. Potrzebujemy raczej ukierunkowanego i zorganizowanego odkrywania wiedzy matematycznej, a jest to możliwe we właściwie zorganizowanych warunkach szkolnych. Warto dodać, że proponowane ujęcie różni się w bardzo ważnej kwestii od tradycyjnego podejścia do nauczania. Myślą przewodnią nauczania skierowanego na odkrywanie matematyki jest taka organizacja środowiska uczenia się uczniów, w której odczuwają oni pogłębione rozumienie treści matematycznych oraz budzi się w nich odpowiedzialność za efekty własnej pracy. Oczekiwana zmiana postaw uczniowskich powinna obejmować również pogłębione rozumienie tego, czym jest matematyka, dostrzeżenie jej użyteczności i korzyści płynących z umiejętności posługiwania się nią. Na koniec warto podkreślić, że to właśnie uczniowskie odkrycia pozwalają na zgłębianie metod matematycznych przy jednoczesnym wyposażaniu ich w narzędzia wyzwalające samodzielność poznawczą.

Nauczanie skierowane na odkrywanie nie jest nowym rozwiązaniem metodycznym, ale wciąż mało popularnym we współczesnej praktyce edukacyjnej. Lekcje budowane w tym podejściu od początku do końca są poświęcone działaniom uczniów, którzy w toku realizacji zadań odkrywają prawa i reguły matematyczne, związki i zależności między obiektami matematycznymi, a także kształtują nowe pojęcia. Proponowane rozwiązanie cechuje zwrot aktywności uczestników lekcji. Stroną aktywną stają się uczniowie, a nauczyciele towarzyszą im w procesie poznania. Niestety proponowane nauczanie poprzez odkrywanie

ma również swoje wady. Wymaga od nauczycieli nie tylko wiedzy merytorycznej z zakresu matematyki, znajomości charakterystycznych cech rozwojowych dziecka oraz umiejętności metodycznych w zakresie planowania i organizacji pracy na lekcji, ale również czasu i nakładu pracy, jaki muszą przeznaczyć na przygotowanie zajęć. Czy warto podjąć ten trud? Myślę, że tak. Nauczanie poprzez odkrywanie przyczyni się nie tylko do wzrostu matematycznych kompetencji uczniów, ale uczyni matematykę ciekawszą, zrozumialszą i atrakcyjniejszą, także dla nauczycieli. Pamiętając, że wprowadzanie dziecka w świat matematyki nie oznacza przekazywania zbioru gotowych schematów postępowania do pamięciowego opanowania, dbajmy o wykształcenie kompetencji ułatwiających sprawne funkcjonowanie w otaczającej nas rzeczywistości.

Konstrukcja niniejszego opracowania prowadzi czytelnika przez trzy rozdziały, koncentrując się kolejno na możliwościach poznawczych dziecka i poglądach na ich rozwój, samym akcie odkrywania matematyki, aż po scharakteryzowanie nauczania sprzyjającego dziecięcym odkryciom. W pierwszym rozdziale nakreślono psychopedagogiczne podstawy poznania matematycznego dziecka. Wyróżniono nie tylko elementy procesów sprzyjających rozwojowi najmłodszych uczniów, ale również podkreślono ich możliwości i potrzeby edukacyjne. Rozdział kończy się przywołaniem głównych oczekiwań wobec nauczania matematyki w klasach I–III formułowanych na podstawie dostrzeganych mankamentów procesów edukacyjnych oraz refleksją nad możliwościami sprostania społecznym oczekiwaniom. Drugi rozdział poświęcono odkrywaniu matematyki, a dokładniej procesom, które silnie aktywują się podczas dziecięcych odkryć matematycznych. Rozdział trzeci w całości poświęcono metodzie nauczania skierowanego na odkrywanie matematyki. Oprócz podstaw teoretycznych proponowanego rozwiązania zwrócono uwagę na pojawiające się w literaturze przedmiotu jego zalety i wady oraz zaproponowano konstrukcję lekcji, która została zilustrowana przykładami zajęć matematycznych dla uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym.

1. Psychopedagogiczne podstawy poznania matematycznego

To, że uczymy się przez całe życie, nie podlega dyskusji. Początkowo w szkołach w sposób zorganizowany, później samodzielnie, poszukując odpowiedzi na nurtujące nas pytania. Nieustannie kształtujemy nowe umiejętności potrzebne nam w życiu codziennym, a także zawodowym. Jednak trudność nie polega na tym, że mamy się uczyć, a raczej koncentruje się wokół pytania: Jak się uczyć, aby uzyskać najlepsze efekty? Poszukując odpowiedzi na to pytanie, należałoby zwrócić się w kierunku psychologii, która zajmuje się badaniami nad ludzkim zachowaniem i stara się m.in. odpowiedzieć na pytania stawiane o optymalizację procesu kształcenia. Optymalizację, której głównym celem staje się zorganizowanie w szkołach doskonałego środowiska uczenia się uczniów.

Na proces kształcenia składają się dwa zależne od siebie procesy, tj. uczenia się i nauczania. Pierwszy jest aktywnością uczniów, a drugi nauczycieli. Procesy te, różnie rozumiane na przestrzeni lat, różnie kształtowały pracę szkół. Rozważania o podstawach kształcenia matematycznego chciałabym rozpocząć od prezentacji stanowiska, które będzie dominowało w całym opracowaniu. Z uwagi na to, że na proces kształcenia składają się uczenie się uczniów i nauczanie nauczycieli, warto określić relacje, jakie mogą między nimi wystąpić. Możemy wyróżnić trzy typy relacji opisujących rangę każdego z uczestników edukacji szkolnej. Pierwsza z nich czyni dominującym nauczanie, w którym najważniejszą osobą na lekcji staje się nauczyciel i to, co ma do przekazania. Uczenie się w tej sytuacji polega na przyswajaniu informacji przekazanych przez nauczyciela i ćwiczeniu sprawności w rozwiązywaniu zadań zaproponowanym sposobem. Kolejna relacja na równi traktuje uczenie się i nauczanie, dzieląc zajęcia edukacyjne na epizody z dominacją raz to nauczyciela, innym razem uczniów. Ostatnia, którą uczyniłam wiodącą

w niniejszym opracowaniu, największe znaczenie przypisuje uczeniu się uczniów. To w tym wypadku uczeń staje się stroną aktywną poznawczo, a przede wszystkim odpowiedzialną za własne uczenie się, które jest indywidualnym procesem budowania i konstruowania własnej wiedzy. Nauczycielowi zaś wyznaczam rolę organizatora środowiska uczenia się uczniów i animatora, w naszym przypadku – matematycznej rzeczywistości. Głównym zadaniem nauczyciela staje się aktywizowanie uczniów i zachęcanie do podejmowania intelektualnych wyzwań. Dominująca w tym ujęciu potrzeba koncentracji na osobie ucznia wymusza na nauczycielach pogłębioną analizę i refleksję nad sposobami uczenia się uczniów oraz nad efektywnością działań dydaktycznych.

Podejmowanie intelektualnych wyzwań przez naszych uczniów wiąże się bezpośrednio z ich możliwościami poznawczymi, zasobem dotychczasowych osiągnięć i nagromadzonych doświadczeń, a także z motywacją do działania i zaspokajaniem naturalnej ciekawości poznawczej. Dlatego właśnie, określając gotowość dziecka do podjęcia aktywności matematycznej, należałoby zapoznać się z dotychczasowymi odkryciami i spostrzeżeniami związanymi z tym, jak uczą się nasze dzieci, jak rozumują podczas wzmożonej działalności intelektualnej, a także które z nich w trakcie uczenia się aktywności umożliwiają najlepszy w danych warunkach rozwój. Problem ten nie jest nowy, a odpowiedzi na to pytanie poszukiwało wielu znamienitych naukowców.

1.1. Zarys psychologicznych koncepcji rozwoju człowieka

Jean Piaget (1896–1980), jak wspomniano we wprowadzeniu, wysuwa śmiałą hipotezę, w której to uzależnia niepowodzenia szkolne w zakresie przedmiotów ścisłych od niewłaściwego nauczania. Wśród nadmiernych przyczynowych trudności wskazuje brak zrozumienia „raczej sposobu nauczania, nie zaś jego treści” (Piaget, 1977a, s. 24). Zwraca uwagę na zbyt pospieszne przechodzenie od struktury jakościowej omawianych zagadnień do bezpodstawnie szybkiego wprowadzania, np. stosunków liczbowych i praw ilościowych. Bardzo mocno akcentuje aktywność uczących się. Uznaje, że ma ona prowadzić do odkrywania lub przynajmniej odtwarzania praw i reguł funkcjonujących w danej dziedzinie (Piaget, 1977a, s. 28). Dominująca w jego teorii potrzeba zmiany o sposobie myślenia dzieci podnosi rangę aktywności własnej jednostki. Samodzielne czynności dziecka w świecie rzeczywistym badacz czyni podstawą myślenia człowieka

(Wood, 2006). Wskazuje, że to właśnie one umożliwiają nabywanie umiejętności oddziaływania na świat i pozwalają dostrzec skutki podejmowanych działań. Tak postrzegane myślenie dziecka ukazuje, że różni się ono od myślenia dojrzałej jednostki, a co więcej – implikuje potrzebę działań pozwalających ową dojrzałość osiągnąć. Rozwój postrzegany nie jako kumulacja kolejnych wiadomości i umiejętności z danego zakresu, a jako samokierowane działania, ma prowadzić dziecko do coraz lepszego rozumienia świata.

Piaget definiuje rozwój intelektualny jako nieprzerwanie trwające równoważenie się dotychczas ukształtowanych struktur poznawczych (Piaget, 1966, s. 12). W wyniku wielu różnorodnych doświadczeń schematy poznawcze ulegają regularnym przekształceniom w kierunku doskonalszych, pełniejszych i trwalszych. Wszystkiemu towarzyszą czynności regulacyjne: asymilacja i akomodacja. Asymilacja ma miejsce wtedy, gdy do już istniejących schematów zmysłowo-ruchowych lub pojęciowych włączamy nowy, pochodzący z zewnątrz element. Może nim być dotychczas niespotykane zdarzenie, przedmiot lub wcześniej niedostrzeżone cechy obiektu. Odpowiadająca za zmiany ilościowe asymilacja koncentruje się na uzupełnianiu funkcjonujących schematów umysłowych o nowe informacje i wzmacnianiu ich. Natomiast drugi z procesów, akomodacja, wymusza konieczność modyfikacji istniejących struktur poznawczych w celu uwzględnienia odmiennych od już ukształtowanych systemów umysłowych. Oba te procesy są ściśle ze sobą powiązane. Ich współwystępowanie umożliwia nie tylko zwiększenie zasobów umysłowych, ale także pozwala łączyć w całość początkowo wyizolowane systemy wiedzy jednostki (Piaget, 1981, s. 8–16). Tak rozumiany rozwój intelektualny implikuje ważne przesłanki dla zorganizowanego nauczania. Otóż z jednej strony podkreśla ustrukturyzowanie i hierarchiczność wiedzy, a z drugiej wskazuje na możliwość występowania wiedzy z danego zakresu w postaci odrębnych schematów. Dla prawidłowo przebiegającego rozwoju intelektualnego dziecka ważny jest zatem sposób organizacji nowych treści, doświadczeń i przede wszystkim łączenie ich w całość tworzącą rozbudowane, trwałe struktury. Dążenie do zachowania równowagi między tym, co ukształtowane, a tym, co nowe, jest procesem ciągłym, ale różni się aktywnościami właściwymi dla danego okresu rozwojowego. To właśnie możliwości poznawcze człowieka determinują cechy dobrej organizacji procesu uczenia się. Warto dodać, że Piaget nie wskazywał wyraźnej potrzeby występowania nauczyciela. Twierdził, że istotą rozwoju intelektualnego dziecka jest ciągle oddziaływanie między nim a środowiskiem, a wiedza i struktury poznawcze rozwijają się w jego własnym umyśle (Piaget, 1981).

Piaget, koncentrując się w swoich badaniach na rozwoju intelektualnym, wyróżnił cztery wspomniane wcześniej stadia, czyli hierarchicznie powiązane okresy rozwojowe, w których kolejne obejmują osiągnięcia poprzedniego i zostają uzupełnione o nowe (Ledzińska, Czerniawska, 2011). Poszczególnym okresom zostały przyporządkowane granice wiekowe, które – co warto podkreślić za autorem koncepcji – nie są sztywne i mogą się zmieniać dla każdej dojrzewającej jednostki. Pierwszy z tych okresów, sensoryczno-motoryczny, przypada na czas od urodzenia do drugiego roku życia. Wśród jego największych osiągnięć wskazywano ukształtowanie podstawowej wiedzy o sobie samym i otaczającej rzeczywistości. Na podstawie zgromadzonych za pomocą narządów zmysłu i własnej aktywności ruchowej informacji powstają pierwsze schematy sensoryczno-motoryczne, które ułatwiają funkcjonowanie w życiu codziennym. Rozwój umysłowy w tym czasie koncentruje się wokół inteligencji praktycznej, przyczyniając się do adekwatności zachowania dziecka w stosunku do otoczenia (Brzezińska, 2020).

Kolejny okres, przypadający mniej więcej na czas od drugiego do siódmego roku życia, wzbogacony o wyobrażenia rzeczywistych przedmiotów, nazwany przedoperacyjnym. W tym czasie pojawia się zdolność do odtwarzania w umyśle nieobecnych fizycznie przedmiotów, ale nie występuje jeszcze umiejętność ich przekształcania czy też dostrzegania i wskazywania związków między nimi i ich elementami. Aktywność dziecka staje się bardziej celowa niż w poprzednim okresie, skoncentrowana na poznawaniu świata zewnętrznego, ale nadal w głównej mierze umiejscowiona w układzie, którego centrum stanowi ono same (dziecięcy egocentryzm). Następuje wzbogacenie dotychczasowych struktur umysłowych i ich rozbudowa, która w dalszym ciągu wspierana jest manipulacjami obiektami rzeczywistymi. Rozwija się umiejętność analizy i syntezy wzrokowej oraz słuchowej. Młodzi ludzie zaczynają dostrzegać braki w swojej wiedzy i chętnie zwracają się z prośbą o jej uzupełnienie. Wyraźnie odróżniają działania poznawcze od innych aktywności. W tym okresie szybko rozwija się mowa i wzrasta zasób opanowanych pojęć. Pojawia się zdolność do realizacji wyznaczonych zadań oraz przyswajania reguł i zasad obowiązujących w grupie. Główną aktywnością dziecka nadal jest zabawa, w której to zaczyna odgrywać role osób zaobserwowanych w najbliższym otoczeniu, ucząc się w taki sposób zasad funkcjonowania w społeczeństwie (Brzezińska, 2020, s. 198–199).

Trzeci okres, przypadający na czas od około siódmego do jedenastego roku życia, to stadium operacji konkretnych. W tym czasie dziecko jest w stanie prze-

przewodzą operacje umysłowe proste i złożone, jednak ciągle mające swoje źródła w działaniach konkretnych. Stopniowo pojawia się umiejętność operowania pojęciami abstrakcyjnymi. Odwracalność operacji myślowych, której zaczątki mogliśmy obserwować już we wcześniejszym stadium, w dalszym ciągu jest możliwa tylko w przypadku czynności uprzednio obserwowanych. Jest to niezwykle istotna cecha, bo właśnie dzięki niej dzieci zaczynają posługiwać się coraz bardziej złożonymi strategiami poznawczymi i organizacyjnymi, a także opanowują umiejętność czytania i pisanie. Następuje dalszy rozwój kontrolowania własnych emocji, dzięki czemu dziecko dłużej i z większym zaangażowaniem koncentruje się na realizacji wyznaczonego zadania. Kształtują się strategie poznawcze i zaczątki metapoznania. Wzrasta znaczenie grupy rówieśniczej, przejawiające się przyjmowaniem obowiązujących w niej zasad i silną potrzebą akceptacji z jej strony. Pojawiają się podstawy rozumowania przez analogię i klasyfikacja. Następuje rozwój samooceny, uwidaczniający się we wzroście trafności oraz umiejętności wykorzystywania jej do planowania i organizacji pracy. Charakterystyczna dla tego okresu zdolność do decentracji umożliwia ujmowanie rzeczywistości z różnych perspektyw. W aspekcie poznawczym oznacza to zdolność do łączenia i jednoczesnego porównywania więcej niż jednej cechy badanego obiektu oraz rozpatrywania sytuacji problemowej w kontekście kilku rozwiązań. Natomiast w aspekcie socjalnym (określana mianem decentracji interpersonalnej) pozwala dziecku przyjąć inny, nie tylko własny punkt widzenia. Zawdzięczamy jej zdolność trafnego postrzegania innego człowieka, rozumienia przyjętego przez niego stanowiska, modyfikowania własnych działań na podstawie spodziewanych reakcji przy jednoczesnym zachowaniu własnego punktu widzenia. Zdolność dziecka do decentracji uznawana jest za sukces tego okresu rozwojowego (Trempeła, 2011, s. 245).

Ostatnim docelowym stadium rozwoju intelektualnego człowieka jest okres operacji formalnych. W tym okresie rozumowanie dziecka nie ogranicza się do materiału konkretnego, ale zaczyna coraz szerzej obejmować abstrakcyjny, by wreszcie osiągnąć poziom pełnej uniwersalizacji myślenia. Jest to czas, w którym człowiek nie tylko doskonali myślenie formalne, ale rozwija zainteresowania światem wartości, idei, nauki oraz kształtuje własną tożsamość i światopogląd (Trempeła, 2011). Tworzące się coraz doskonalsze formy umysłowe mają duży wpływ na rozwój społeczny, moralny, uczuciowy oraz osobowościowy. Stabilność i ciągłość rozwoju, którą zakładał Piaget, miały na celu pełną adaptację jednostki do środowiska. Osiągnięcia stadium operacji formalnych stanowią podstawę autonomicznego funkcjonowania jednostki w otacza-

jącej rzeczywistości przy jednoczesnej zdolności realnego oddziaływania na nią (Inhelder, Piaget, 1970).

Teoria Piageta znacząco przyczyniła się do zmian w postrzeganiu rozwoju intelektualnego człowieka i do dziś stanowi źródło inspiracji dla kolejnych badań, a mimo to nie obroniła się przed krytyką. Wśród zarzutów wysuwanych pod adresem prac tego znamienitego psychologa znalazło się określenie ram czasowych kolejnych stadiów rozwojowych, które – moim zdaniem – odgrywają drugorzędną rolę w całej teorii. Do budowania przestrzeni edukacyjnej dziecka najistotniejsze jest stanowisko dotyczące ciągłości procesu rozwoju i możliwości stymulowania go. Inny zarzut odnosił się do podstaw metodologicznych prowadzonych badań. Zadaniom wykorzystywanym w badaniach zarzucano błędy w sformułowanych pytaniach, pomijanie kontekstu społecznego badanego, niedoceniając roli języka, czy wreszcie wyrażono wyraźny sprzeciw wobec sztywnego przypisania cechy rozwojowej do danego stadium (Wood, 2006, s. 54–62). Dla nas jednak najistotniejsze staje się postrzeganie samego rozwoju jako kształtowanie się coraz doskonalszych struktur umysłowych oraz opisanie możliwości poznawczych dziecka w zależności od wieku.

W kulturowo-społecznej koncepcji rozwoju Lwa Siemionowicza Wygotskiego (1896–1934) również kluczową rolę przypisano aktywności własnej dziecka. Rozwój, postrzegany jako następstwo interakcji ze środowiskiem i jego wytworami, staje się podstawą osiągnięcia dojrzałości psychicznej (Trempała, 2011, s. 107). Jednostka – początkowo poprzez aktywność sensoryczno-motoryczną – bada otaczającą ją rzeczywistość, poznaje przedmioty i dostępne narzędzia, po czym stara się je wykorzystać podczas własnego działania. Oprócz cech właściwych obiektów rzeczywistych poznaje ich nazwy, stopniowo łącząc je z obiektami podczas działań praktycznych. Łączenie działań praktycznych z mową umożliwia dziecku coraz lepsze planowanie w sferze werbalnej. Punktem kulminacyjnym dojrzewania mowy u Wygotskiego jest rozwój mowy wewnętrznej, którą utożsamia z myśleniem. Planowanie działań i przewidywanie ich następstw w sferze umysłowej przypisuje procesowi interioryzacji, czyli uwewnętrznieniu obiektów funkcjonujących w danej kulturze. Na przeciwnym biegunie stawia proces exterioryzacji, wskazując, że za jego pomocą jednostka uzewnętrznia własne stany umysłowe i może uczestniczyć w procesie kulturotwórczym. Za dojrzałą jednostkę uważa tę, która w wyniku stałego rozwoju psychiki potrafi na poziomie umysłowym, bez konieczności wykonywania czynności praktycznych, wykonywać rozmyślenia pojęciowe i abstrakcyjne, przewidywać następstwa działań i modelować początkowo przyjęte rozwiązania (Wygotsky, 1978).

Bardzo ważną i odmienną od Piagetowskich przekonań jest teza głosząca, że „nauczanie winno wyprzedzać rozwój” (Trempała, 2011, s. 108). Skoro tak, to organizacja nauczania ma istotne znaczenie w rozwoju dojrzałości psychicznej człowieka i wskazuje na kluczową rolę dojrzałej jednostki w kierowaniu aktywnościami dziecka. Nauczanie wybiegające przed możliwości rozwojowe Wygostki określił, formułując strefy rozwoju dziecka. Pierwsza, nazwana strefą aktualnego rozwoju (SAR), odnosi się do zakresu tych wiadomości i umiejętności dziecka, które pozwalają mu samodzielnie rozwiązać stawiane przed nim zadania. Druga, strefa najbliższego rozwoju (SNR), określa ten zasób dotychczasowych osiągnięć intelektualnych dziecka, który przy wsparciu osoby dorosłej pozwala na osiągnięcie sukcesu (Wygotski, 1971, s. 542). Jak nietrudno się domyślić, strefy aktualnego i najbliższego rozwoju są indywidualne dla każdego z nas, a w praktyce edukacyjnej winny stanowić podstawę indywidualizacji procesu kształcenia. Trudność dydaktyczna, która pojawia się w ich kontekście, związana jest z koniecznością trafnego określenia zakresu tych stref i właściwego zaplanowania działań edukacyjnych.

Uznane za jedno z najważniejszych osiągnięć Wygotskiego prawo rozwoju kulturowego podkreśla zależność rozwoju jednostki właśnie od kontekstu kulturowego, w którym jednostka się znajduje. Silnie oddziałująca od pierwszych dni życia dziecka płaszczyzna zewnętrzna (społeczna) angażuje początkowo ludzi z najbliższego otoczenia dziecka (rodzice, opiekunowie, starsze rodzeństwo, nauczyciele) i to oni wówczas mają największy wpływ na tworzące się procesy psychiczne (płaszczyzna wewnętrzna). Niemniej jednak kształtujące się struktury umysłowe nie są wiernym odbiciem doświadczanych kontekstów, ale stanowią konstrukcję indywidualną i kreują dalszy rozwój jednostki (Trempała, 2011, s. 109). Mając na uwadze, że rozwój psychiczny jest ukierunkowany od zewnątrz do wewnątrz i jest rozciągnięty w czasie, Wygotski wskazuje charakterystyczne okresy w rozwoju dziecka. Jego zdaniem początkowe aktywności dziecka koncentrują się na sytuacjach konkretnych, czyli takich, w których manipuluje rzeczywistymi przedmiotami i na ich podstawie tworzy pierwsze struktury umysłowe. Początkowo izolowane czynności umysłowe stopniowo przekształcają się w czynności wykonywane w myśli, tworząc coraz bardziej złożone struktury, by wreszcie osiągnąć poziom myślenia abstrakcyjnego. Mowa, tak istotna w poglądach Wygotskiego, również rozwija się stopniowo. Poczynając od mowy zewnętrznej (społecznej), gdy dziecko często posługuje się słowami, których nie rozumie, a mimo to używa trafnie, poprzez mowę egocentryczną, stanowiącą pod-

stawę związku mowy z rozwojem wyższych funkcji psychicznych, aż do mowy wewnętrznej, określanej mianem myślenia (Wygotski, 1971, s. 126–127).

Jerome Seymour Bruner (1915–2016), poszukując teorii nauczania, sformułował kilka praw rozwoju umysłowego. Twierdził, że rozwój polega na uniezależnianiu się jednostki od bezpośredniej natury bodźca, a kluczowa staje się zdolność interioryzacji informacji płynących z zewnątrz oraz umiejętność magazynowania ich w taki sposób, aby odzwierciedlały rzeczywistość (Bruner, 1978). Uważał, że stanowi to podstawę do przechodzenia od pojedynczych informacji w kierunku systemów złożonych, uwzględniających wiele możliwości rozbudowanego świata zewnętrznego. Bardzo ważna w teorii Brunera jest rosnąca zdolność do komunikowania się z sobą i innymi. Komunikowanie umożliwiają słowa i symbole, dlatego też język winien być postrzegany jako instrument, który – oprócz niepodważalnych walorów przy porozumiewaniu się czy wymianie myśli i spostrzeżeń – ułatwia proces uczenia się i nauczania. Znaczącą pozycję w teorii rozwoju umysłowego Bruner przypisuje osobie dorosłej, a dokładniej ilości i jakości kontaktów z nią, od których uzależnia rozwój dziecka.

Poszukując odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób dziecko uniezależnia się od bodźców bezpośrednich i magazynuje doświadczenia o otaczającej go rzeczywistości, Bruner wskazał na system reprezentacji, który uznał za wysoce użyteczny w rozważaniach nad rozwojem umysłowym człowieka. Przywołany system reprezentacji badacz definiuje jako zbiór reguł, które pozwalają jednostce tworzyć pojęcie stałości doświadczanych zdarzeń. Wskazuje kilka interesujących cech reprezentacji budowanych w umysłach:

- istnienie różnych sposobów tworzenia reprezentacji, które podkreślają znaczenie aktywności jednostki i potrzebę różnorodnych doświadczeń,
- selektywność tworzonych reprezentacji, która przejawia się w wychwytywaniu tylko wybranych cech obiektu lub zdarzenia,
- brak arbitralności poszczególnych reprezentacji, która podkreśla różnorodność w zakresie postrzegania, odbioru czy możliwego rozumienia zdarzeń lub obiektów,
- sumaryczny charakter tworzonych reprezentacji, który pozwala na łączenie ich w obrębie jednego obiektu lub zdarzenia i ułatwia tworzenie złożonych struktur umysłowych,
- możliwość przekształceń w obrębie reprezentacji, która umożliwia przechodzenie na wyższy poziom ogólności lub w miarę konieczności powrót do szczególnego przypadku,

- możliwość przekształceń z jednego systemu reprezentacji na inny,
- możliwość kształtowania reprezentacji poprzez narzędzia lub instrumenty uwarunkowane kulturowo z uwzględnieniem ewolucji człowieka (Bruner, 1978, s. 531 i dalsze).

Bruner wyszczególnia trzy typy reprezentacji: enaktywną, ikonyczną i symboliczną. Nie wyznaczają one kolejnych etapów rozwoju jednostki i są nam dostępne przez całe życie. Mogą wystąpić jednocześnie lub przenikać się, tworząc np. reprezentację enaktywno-ikoniczną czy ikoniczno-symboliczną. Czynnikiem warunkującym ich rozróżnialność jest sposób, w jaki powstają. Pierwsze z wymienionych – reprezentacje enaktywne – kształtują się w wyniku działania w rzeczywistej przestrzeni, na podstawie danej reakcji ruchowej wynikającej z doświadczenia z udziałem rzeczywistych obiektów. Z takimi reprezentacjami mamy do czynienia w przypadku pływania, jazdy na rowerze czy spacerowania. Kolejne – reprezentacje ikoniczne – pozwalają na ujmowanie pojedynczych obiektów lub zdarzeń w formie graficznej, w czym główną rolę odgrywają spostrzeżenia i wyobrażenia ujmujące struktury postrzeganych obiektów lub zdarzeń w formę obrazu. Reprezentacje symboliczne, związane z przedstawieniami słownymi i językowymi, w modelowy sposób ujmują obiekty i zdarzenia, umożliwiają dokonywanie przekształceń umysłowych, w wyniku których osiągamy zdolność „formułowania deklaratywnych twierdzeń na temat rzeczywistości” (Bruner, 1974, s. 33). W teorii Brunera istotne jest to, że jednostka osiąga dojrzałość umysłową dzięki przechodzeniu przez fazę działania, obrazową i symboliczną. Przy zachowaniu wskazanej kolejności reprezentacje ulegają integracji i wzajemnym przekładom z jednej w drugą oraz są efektem indywidualnego poznania następującego w wyniku własnej aktywności.

Dla pełnej konstrukcji płaszczyzny rozważań o poznaniu matematycznym odwołam się również do koncepcji strukturacji i restrukturyzacji doświadczenia Marii Tyszkowej (1931–1993) oraz koncepcji rozwoju aktywności Marii Przetacznik-Gierowskiej (1920–1995). Koncepcja M. Tyszkowej w centrum stawia doświadczenia jednostki, które czyni odpowiedzialnymi za rozwój zdefiniowany jako „ciąg zmian wynikających z organizowania się struktur doświadczenia (strukturacja) i ich przekształcania (restrukturyzacja)” (Trempała, 2011, s. 113). Struktury doświadczenia są odpowiednikami struktur psychicznych, które rozbudowują się w wyniku własnej aktywności jednostki. Jednak autorka uznaje, że są one uzależnione od indywidualnych możliwości gromadzenia i organizowania doświadczeń. Rozróżnia doświadczenia gatunkowe – odpowiedzialne za budowanie gotowych

struktur i połączeń nerwowych, doświadczenia indywidualne – zdobywane w trakcie podejmowanych działań, kontaktów z innymi czy przeżyć oraz doświadczenia społeczne – gromadzone dzięki kontaktom społecznym i uczestnictwu w kulturze. Doświadczenia indywidualne, choć unikatowe, są podobne u dzieci w zbliżonym wieku, podobnie jak występujące u nich trudności rozwojowe. Wskazuje to na potrzebę właściwej organizacji pracy w danej grupie wiekowej. Wspomnianą wcześniej aktywność własną Tyszkowa czyni odpowiedzialną za interakcje, których jednostka doświadcza w konfrontacji ze środowiskiem. Wzajemna zależność między aktywnością własną dziecka i środowiskiem stanowi podstawę zmian konstrukcyjnych i funkcjonalnych dotychczasowych struktur umysłowych. Rozwój jest procesem cyklicznym i interakcja ze światem zewnętrznym, mimo osiągniętego pewnego poziomu autonomii, wywołuje zmiany, kształtując również sam rozwój psychiczny (Trempała, 2011, s. 115).

Maria Przetacznik-Gierowska aktywność własną jednostki uznaje natomiast za główny czynnik rozwoju człowieka i kształtowania jej relacji ze środowiskiem. Adaptacyjna funkcja aktywności przystosowuje jednostkę do otoczenia, jednocześnie pozwalając jej na wywoływanie w nim zmian. Ma charakter rozwojowy i ulega ciągłym przekształceniom uzależnionym od wieku jednostki. To właśnie w okresie dzieciństwa i młodości aktywność własną cechuje największe tempo, dynamika zmian i duża plastyczność. Badaczka, analizując zmiany aktywności występujące w ciągu całego życia człowieka, wskazała ważne z dydaktycznego punktu widzenia wzajemnie dopełniające się procesy charakteryzujące ich przebieg. Za pierwszą parę uznała różnicowanie i scalanie, podkreślając, że zmiany aktywności idące w obu tych kierunkach umożliwiają nie tylko hierarchizację działań i czynności, ale przede wszystkim pozwalają na budowanie systemów bardziej złożonych oraz dostrzeganie związków między nimi. Kolejną parą jest interioryzacja i eksterioryzacja, dzięki którym początkowe czynności na obiektach rzeczywistych, następnie na zastępnikach, rysunkach i schematach, przechodzą w czynności wewnętrzne, a te kierują aktywnością zewnętrzną jednostki. Ważną parą procesów wyodrębnionych w przestrzeni aktywności własnej jednostki jest uświadomienie i automatyzacja, które nie tylko przyczyniają się do zwiększenia świadomości wykonywanych czynności, ale stopniowo je automatyzują, skracając czas wykonywania działań. Ostatnia para procesów, socjalizacja i indywidualizacja, odpowiadają nie tylko za akceptację i przystosowanie się do środowiska, ale pozwalają także – a może przede wszystkim – na ukształtowanie i zachowanie własnej indywidualności. Jak twierdzi Przetacznik-Gierowska, jednostka zawdzięcza rozwój, a dokładniej – jego

przebieg, tempo i kierunki, właśnie własnej aktywności. To własna aktywność umożliwia modyfikację środowiska i własnego kształcenia. Ma złożoną naturę i jest pewnym stanem charakteryzującym jednostkę (Trempała, 2011, s. 117).

1.2. Możliwości poznawcze dziecka w zakresie matematyki

Poszukując najkorzystniejszych warunków rozwoju jednostki, stale zastanawiamy się, które z nich mają kluczowe znaczenie, a które pełnią rolę współtworzących. Chcąc jednak mówić o organizacji środowiska uczenia się uczniów, należałoby określić przestrzeń dalszych rozważań. Przyjmując osiągnięcia przywołanych wcześniej wybitnych naukowców, możemy pokusić się o nakreślenie wspólnych cech wskazujących kierunek dalszych poszukiwań w obszarze działań wspierających dziecko na drodze poznania matematycznego.

Punktem wyjścia będzie stwierdzenie, że rozwój jest procesem ciągłym, długotrwałym (Matczak 2003, s. 10). Rozciągnięty w czasie, rozpoczyna się od pierwszych dni życia dziecka i w sprzyjających warunkach, przy odpowiedniej determinacji jednostki, nie kończy się nigdy. Ważną kwestią jest, że nie odbywa się na zewnątrz. Jest wewnętrznym, indywidualnym procesem każdego człowieka i jako taki może przebiegać różnie u każdego z nas (Straś-Romanowska, 2002). Wspomniana różnorodność obejmuje tempo, dynamikę i harmonijność w zakresie tworzenia kolejnych struktur umysłowych. Istotą rozwoju staje się zatem osiąganie coraz doskonalszych stanów dojrzałości psychicznej, umożliwiających aktywne funkcjonowanie w otaczającej rzeczywistości. Aktywne funkcjonowanie rozumiane nie tylko jako przystosowanie, ale jako pełne i aktywne uczestnictwo w kulturze (Trempała, 2011, s. 117).

Głównym motorem rozwoju jest aktywność własna jednostki, która pozwala na doświadczanie samego siebie i przestrzeni rozpościerającej się wokół (Przetacznikowa, 1973, s. 174; Kofta, 1989, s. 35; Matczak, 1992, s. 156; Brzezińska, Lutomski, Smykowski, 1995, s. 12; Brzezińska, 2000, s. 69). Wielość i różnorodność gromadzonych doświadczeń ubogaca jednostkę, czyniąc ją autonomiczną, ale nie wyizolowaną z rzeczywistości. Poziom aktywności własnej warunkuje ilość zdobytych doświadczeń, a to z kolei oddziałuje na prędkość rozwoju (Trempała, 2011, s. 114–115), dlatego właśnie dążenie do zapewnienia różnorodności doświadczeń w procesie kształcenia jest ważne dla prawidłowego rozwoju.

Aktywność własną jednostki, jak dowodzi M. Tyszkowa, cechuje różne natężenie w kolejnych latach naszego życia (Trempała, 2011, s. 115–117). Podkreśla-

jąc jej największą plastyczność i intensywność w okresie dzieciństwa i młodości, autorka pokazuje, że jest to okres w życiu człowieka, którego nie należy lekceważyć w kontekście rozwoju. Mimo że to jednostka jest w pełni odpowiedzialna za własny rozwój, a konstruowanie znaczeń ma charakter indywidualny, to za Wygotskim i Brunerem przyjmujemy znaczący wpływ kontekstu kulturowego, który nie tylko warunkuje poznanie, ale i obejmuje relacje z innymi ludźmi. Od ilości, a przede wszystkim jakości tych relacji zależy przebieg rozwoju psychicznego, dlatego czynnikiem znaczącym staje się wsparcie udzielane z zewnątrz. Nie obejmuje ono jedynie zaspokajania potrzeb życiowych, ale koncentruje się na kierowaniu i ułatwianiu przechodzenia na wyższy poziom umysłowy.

Rozważając możliwości rozwojowe dziecka w zakresie matematyki, należałoby zastanowić się, w jaki sposób odpowiedzieć na potrzeby edukacyjne dziecka i czego możemy się spodziewać w obszarze osiągnięć edukacyjnych. Badania nad rozwojem umysłowym dzieci wyraźnie wskazują na charakterystyczny w kolejnych etapach edukacji sposób „patrzenia na świat”. Periodyzacja procesu rozwojowego umożliwia wyodrębnienie specyficznych, właściwych dla danego wieku dziecka, cech. Nas będzie interesował okres przypadający na pierwszy etap edukacyjny. Obejmuje on dzieci w wieku od 7. do 10. roku życia i jest odpowiednikiem piagetowskiego okresu operacji konkretnych. Jednak założenie, że w grupie pierwszoklasistów znajdują się tylko uczniowie, którzy już osiągnęli ten poziom, jest wielkim uproszczeniem. Ten fakt silnie akcentuje Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, przestrzegając przed zbyt pochopnym przyjmowaniem założenia, że uczniowie w klasie stanowią jednorodną pod względem poznawczym grupę (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). Jest to jeden z powodów, dla którego rozważania o możliwościach poznawczych dziecka rozpoczniemy od stadium przedoperacyjnego, a zakończymy na stadium operacji formalnych. Drugi powód przyjęcia takiego rozwiązania wiąże się z koniecznością określenia miejsca, od którego rozpoczynamy szkolne działania edukacyjne, i miejsca, do którego zmierzamy. Ponadto, charakteryzując możliwości rozwojowe dziecka, nie możemy ograniczyć się do sfery poznawczej, bo – jak wiemy – nie funkcjonuje ona w oderwaniu od innych sfer: fizyczno-motorycznej, emocjonalnej czy społecznej.

1.2.1. Zmiany w sferze poznawczej

Rozwój dziecka w sferze poznawczej ściśle wiąże się z rozwojem umiejętności odbierania, przetwarzania i przyswajania informacji płynących ze środowiska, w którym dziecko funkcjonuje. Umiejętności te pozwalają jednostce na

analizę otaczającej rzeczywistości, formułowanie o niej wniosków oraz określając sposób, w jaki się uczymy. Rozwój poznawczy dziecka we wczesnej edukacji dostrzegamy w zmianach sprawności percepcyjnej, rozwoju funkcji zarządzających poznaniem, rozwoju pamięci i uwagi, a także w obrębie dziecięcego myślenia.

Postępujące dojrzewanie układu nerwowego już w wieku przedszkolnym znacznie wpływa na sprawność percepcyjną dziecka. Rozpoczyna się od koncentracji na najsilniej wyeksponowanych elementach obiektu (dziecięcy synkretyzm) i rozwija się w kierunku dostrzegania jego mniej charakterystycznych cech, a także relacji i stosunków występujących między elementami obserwowanego obiektu, pozwalając tym samym na różnicowanie w zakresie kształtów, odcieni barw, dźwięków czy zachowanie tonacji i rytmów. Natomiast już w młodszym wieku szkolnym dzieci mają zdolność poddawania pogłębionej analizie spostrzeżone obiekty, by następnie w syntezie wtórnej ponownie połączyć je, tworząc całościowy obraz z zachowaniem relacji i stosunków wyodrębnionych w trakcie analizy. Ta cecha naszego umysłu ma duże znaczenie nie tylko w nauce pisania i czytania, ale również przy dostrzeganiu i rozróżnianiu kształtów, klasyfikowaniu czy szeregowaniu i porządkowaniu. W pierwszych latach nauki szkolnej zdarza się tzw. odwrotne pisanie, kiedy dziecko zapisuje litery i cyfry jak w odbiciu lustrzanym. Jest to sytuacja, która może mieć związek z zaburzeniami w obrębie percepcji wzrokowej lub świadczyć o dysleksji (o lustrzanym odbiciu jako objawie dysleksji można mówić jednak tylko wtedy, gdy zjawisko odwracania znaków nie ustępuje w trakcie nauki). To właśnie m.in. za sprawą nauki pisania i czytania wzrasta zdolność do korygowania czynności motorycznych i percepcyjnych. Doświadczenia dziecka w tym zakresie pozwalają całkowicie zniwelować wspomniane trudności i wspierają przejście dziecka z poziomu kopiowania znaków do poziomu odwzorowywania nawet złożonych układów. Ponadto spostrzeganie dziecka na początku edukacji szkolnej w porównaniu z przedszkolną staje się bardziej uporządkowane, systematyczne, obejmujące wiele aspektów analizowanego obiektu i – przede wszystkim – znacznie dokładniejsze. Jest to bardzo istotne dla projektowania sytuacji, w których dzieci będą doświadczać obecności matematyki w otaczającym świecie (Trempała, 2011, s. 204 i dalsze).

Funkcje zarządzające rozwojem poznawczym umożliwiają planowanie, inicjowanie i kierowanie w przemyślany sposób własną aktywnością. Wśród komponentów funkcji zarządzających rozwojem poznawczym dziecka wymienimy planowanie, giętkość poznawczą oraz pamięć operacyjną (Trempała, 2011,

s. 205). Tu również zachodzą zmiany. Wzrost umiejętności w zakresie planowania dostrzegamy, obserwując dziecko podczas rozwiązywania zadań. Przejawia się on między innymi wnikliwszą analizą zadania oraz umiejętnością oderwania się od narzucającego się rozwiązania na rzecz uwzględniania innych strategii postępowania. To przewyższanie nawykowych odpowiedzi jest związane również z większym zaangażowaniem dziecka w samą aktywność planowania i podejmowania decyzji, co zresztą podkreśla wzrost świadomego działania w procesie uczenia się. Ma to związek również ze zmianami dokonującym się w pamięci i uwadze dziecka. Zwiększająca się pojemność pamięci operacyjnej, kształtujące się strategie pamięciowe (powtarzanie, grupowanie, elaboracja) i skuteczne ich wykorzystywanie znajdują swoje odzwierciedlenie we wzroście koncentracji i zaangażowania w rozwiązywane zadanie. Wzrasta również szybkość wykonywania zadań. Pojawiają się indywidualne strategie pamięciowe, będące odpowiednikiem przekonań dziecka o tym, jak najlepiej zapamiętywać. Dojrzewająca świadomość własnych możliwości poznawczych powoduje wzrost uwagi i jej selektywność. Działania dziecka przestają być bezcelowe, a koncentrują na tych aspektach zadania, które prowadzą do rozwiązania. Kształtujące się strategie pamięciowe są silniejsze, jeśli kodowanie przez dziecko informacji następuje w wyniku czynności konkretnych, nie tylko werbalnych (Jagodzińska, 1991). Potwierdzają to m.in. wyniki badań G.M. Daviesa nad kontekstowością pamięci. Badacz uważa, że rozpoznawanie i przywoływanie zdarzeń czy obiektów z pamięci zależy od sytuacji, w której zostały ukształtowane. Dzieci bardziej zainteresowane są działaniem i skupiają się na tym, co się robi, niż na kwestii tego, jak to wygląda (Trempeła, 2011). Należy jednak mieć na uwadze, że rola funkcji zarządzających maleje w chwili, gdy pewne czynności stają się w pełni zautomatyzowane i nie wymagają dokładnej analizy, planowania i organizacji rozwiązania. Ta automatyzacja funkcji zarządzających może stać się przyczyną wykonywania działań nawykowo, bez uświadamiania sobie kolejnych czynności prostych. U dzieci podczas uczenia się matematyki możemy dostrzec zjawisko automatyzacji czynności umysłowych bez ich rozumienia. Zazwyczaj wywołuje je trenowanie rozwiązywania zadań według schematu (tzw. mechaniczne uczenie się matematyki). I tutaj właśnie pojawia się jeden z największych problemów kształcenia matematycznego – co w sytuacji, gdy to, co mechanicznie wyćwiczone, nie jest długo wykorzystywane? Niestety brak świadomości kolejnych czynności umysłowych, niedostrzeganie zależności i związków między obiektami prowadzi do bezradności na polu matematyki. Ponadto to w przedwczesnym zautomatyzowaniu pewnych działań doszukujemy się

przyczyn trudności związanych z twórczym, świadomym i aktywnym działaniem na lekcjach matematyki.

Początkowo, w okresie przedoperacyjnym, dominującym materiałem myślowym są tzw. obrazy umysłowe, które będąc formą kopii rzeczywistości, mają charakter indywidualny i mogą się różnić. Różnice powstają w wyniku uwzględniania przez dziecko tylko pewnych cech obiektu, co podkreśla znaczenie jego indywidualnego postrzegania. Wśród głównych czynności myślowych w tym okresie możemy wyróżnić: porównywanie, szeregowanie oraz początki klasyfikacji. Porównywanie, za pomocą którego dzieci dostrzegają różnice między obiektami, przekształca się w szeregowanie empiryczne, czyli uwzględniające tylko jedną relację (np. przy układaniu patyczków – od najmniejszego do największego, kiedy losowo wybrany patyczek jest porównywany z ostatnim bez uwzględnienia długości tych wcześniej ułożonych). W późniejszym okresie pojawia się łączenie obiektów w klasy zazwyczaj na podstawie jednej cechy, bo uwzględnienie dwóch i więcej cech sprawia dzieciom znaczne trudności. Na poziomie przedoperacyjnym dzieci budują zbiory niefiguralne, a z nich – większe lub mniejsze. Nie dostrzegają relacji ilościowej między zbiorem i jego podzbiorem. Dopiero w okresie operacji konkretnych umiejętności zostają uzupełnione o budowanie i dostrzeganie relacji między zbiorami powstałymi w wyniku klasyfikacji multiplikatywnej i hierarchicznej. Klasyfikacja multiplikatywna polega na budowaniu zbioru według wielu kryteriów, tzn. elementy zbioru mają więcej niż jedną cechę wspólną, natomiast hierarchiczna polega na łączeniu metody zstępującej i wstępującej, a także ustaleniu relacji ilości między zbiorem i jego podzbiorem. Klasycznym przykładem zadania ujawniającego dziecięce trudności w zakresie klasyfikacji multiplikatywnej i hierarchicznej oraz wiążącej się z nimi zasady inkluzji jest wskazanie np. *Czego jest więcej: kwiatów czy tulipanów, jeśli w wazonie znajduje się 6 tulipanów i 5 innych kwiatów?*

W okresie operacji konkretnych myślenie dziecka staje się już logiczne, elastyczne i bardziej zorganizowane. Rozwijająca się zdolność do czynności umysłowych ściśle wiąże się z psychologicznym procesem interioryzacji. To właśnie dzięki niemu uczeń stopniowo odrywa się od konieczności manipulowania obiektami w świecie rzeczywistym i zaczyna wykonywać operacje w myśli na podstawie własnych wyobrażeń, by wreszcie nabrać cech właściwych dla operacji umysłowych. W myśleniu dziecka zaczynają dominować zintegrowane i odwracalne czynności myślowe, które stanowią istotny czynnik rozwoju poznawczego, gdyż bez umiejętności przeprowadzania rozumowania w jedną, a potem w drugą stronę

(tj. od końca, powracając do punktu wyjścia) nie możemy kształtować wielu pojęć matematycznych, np. dodawania i odejmowania jako działań odwrotnych.

Czynności umysłowe łączą się w złożone układy obejmujące relacje między elementami w obrębie jednego układu, ale także między układami. W tym okresie następuje wzrost rozumienia pojęć, niezależny od wykonanych czynności, czyli myślenie abstrakcyjne, które umożliwia dziecku poznanie pośrednie bez konieczności wykorzystania bodźca rzeczywistego. Pojawia się zdolność do ujmowania obiektów z innej perspektywy niż tylko własnej oraz wykorzystywanie wszystkich dostrzegalnych cech obiektu w wielu aspektach. Rozwija się zdolność do formułowania pierwszych praw i reguł, która implikuje wzrost kompetencji w zakresie myślenia indukcyjnego. Wspomniana wcześniej odwracalność myślowa jest podstawą opanowania zasady zachowania stałości. Jako pierwsza pojawia się zasada stałości liczebności zbioru, następnie kolejno: stałości w odniesieniu do masy, powierzchni i ilości cieczy, by w końcu, w okresie około 10. roku życia, uznać niezmiennosc ciężaru i objętości. Dominujące dotychczas obrazy umysłowe stanowiące materiał czynności myślowych zaczynają być wyrażane na zewnątrz przez symboliczne zastępniki. Pojawiają się bardziej złożone formy reprezentacji oraz pojęcia. W myśleniu dziecka w okresie operacji konkretnych dominują obrazy kinetyczne i transformacyjne. Łączy się to z dziecięcą zdolnością do dostrzegania poszczególnych etapów ruchu obiektu, uwzględniania przekształceń obiektów polegających na zmianie jednej z cech i określeniu dokonanej przez nią zmiany w stosunku do innej cechy (tak jak w przypadku doświadczenia z plasteliną czy zmianą kształtu naczynia, w którym znajdował się płyn). Rozwój procesów poznawczych, zwłaszcza w pierwszej połowie edukacji wczesnoszkolnej, opiera się na manipulacji przedmiotami lub wyobrażeniami konkretnych przedmiotów. Zdarzają się jednak sytuacje, w których myślenie dziecka oderwane jest od konkretnego przedmiotu i dokonywane jest na symbolach. Wyraźny wzrost w kierunku operacji formalnych możemy dostrzec pod koniec klasy drugiej i w klasie trzeciej. Wtedy właśnie wyraźnie obserwujemy pierwsze dziecięce odkrycia praw i zależności, a także sprawdzanie przez dzieci własnego rozumowania (Trempała, 2011). Pojawiają się zaczątki krytycznego myślenia, które swą pełną dojrzałość osiągną w stadium operacji formalnych. Najważniejszą zmianą, jaka dokonuje się w myśleniu dziecka w okresie wczesnoszkolnym jest to, że „staje się ono [myślenie] samodzielną wewnętrzną czynnością poznawczą, operującą pojęciami, realizowaną w słowach i przebiegającą zgodnie z zasadami logiki” (Trempała, 2011, s. 607).

1.2.2. Zmiany w sferach emocjonalnej, fizyczno-motorycznej i społecznej

Niemniejsze znaczenie dla rozwoju umysłowego jednostki mają zmiany dokonujące się w sferze emocjonalnej. To dzięki nim coraz wyraźniej dostrzegamy sygnały płynące z otoczenia i na nie kierujemy swoją uwagę. Chętniej podejmujemy się coraz trudniejszych wyzwań czy wyzwalamy motywację działaniową (Kowalewska, 2010, s. 175). Doświadczane przez nas pozytywne emocje wspierają pamięć, koncentrują naszą uwagę, wzmacniają i podtrzymują gotowość do działania, zaś negatywne potrafią demotywować i hamować aktywność działaniową (Putkiewicz, 1987, s. 103). Zmiany te nie mogą być pomijane przy organizacji dziecięcego uczenia, a co więcej, warto zabiegać o wyzwalamie właśnie pozytywnych emocji w kontaktach z matematyką. Jest to bardzo ważne, szczególnie w obliczu panującej ogólnej niechęci do tego przedmiotu.

Nabywana stopniowo dojrzałość emocjonalna, wiążąca się ściśle z dojrzewaniem układu nerwowego, przechodzi przez kolejne etapy. I tak pod koniec wieku przedszkolnego dzieci sprawniej dekodują i wyrażają emocje (Saarni, 1988). Stałe wzbogacanie słownictwa i rosnąca świadomość wykorzystywanych form gramatycznych ułatwiają im werbalizację odczuwalnych stanów emocjonalnych (Kielar-Turska, 2006). Coraz sprawniej odczytują emocje przekazywane w formie gestów i min. W pełni rozumieją rolę rozpoznawanych emocji i wykorzystują je w kontaktach interpersonalnych. Ta wiedza niejednokrotnie pozwala na osiągnięcie celu, dlatego dzieci tak chętnie z niej korzystają.

O tym, w jaki sposób uczniowie radzą sobie z pokonywaniem trudności, decyduje poziom dojrzałości emocjonalnej, motywacji, umiejętności dokonywania oceny własnych możliwości, nawyki ukształtowane w sytuacjach trudnych oraz dotychczasowe osiągnięcia w zakresie wiadomości i umiejętności (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s. 70). To właśnie pokonywanie trudności ma wartość kształcącą, a każdy sukces nie tylko wpływa na uczniowski wzrost poczucia własnej wartości, ale umożliwia coraz łatwiejsze osiąganie kolejnych (de Finetti, 1983, s. 15). Dostrzegalny w młodszym wieku szkolnym wzrost odporności psychicznej, czyli umiejętność znoszenia napięcia emocjonalnego przy jednoczesnym zachowaniu dotychczasowego poziomu funkcjonowania (Tyszkowa, 1988), zwiększa stopień pokonywania trudności napotkanych podczas rozwiązywania zadań matematycznych. Znaczenie emocji odczuwanych podczas uczenia się matematyki podkreślało wielu wybitnych naukowców. Zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej dojrzałość emocjonalną dziecka do uczenia się matematyki możemy

dostrzec w pozytywnym nastawieniu do samodzielnego rozwiązywania zadań. Badaczka dojrzałość tę uważa za niezbędną w sytuacjach wymagających wysiłku intelektualnego (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992). G. Polya również podkreśla, że nie tylko intelekt warunkuje prawidłowe rozwiązywanie zadań, ważne są również emocje (Polya, 2009). Czyniąc emocje odpowiedzialnymi za uczenie się matematyki, powinniśmy poświęcić im więcej uwagi. Bo to, że sytuacje trudne pojawiają się podczas uczenia się matematyki, wynika z jej charakteru i należy je traktować jako naturalne przeszkody na drodze do wiedzy. Jednak radzenie sobie z nimi w dużej mierze zależy od umiejętności zachowania równowagi między pojawiającymi się negatywnymi i pozytywnymi emocjami (Gajdzica, 2011). Konstruując szkolnych proces kształcenia, warto pamiętać, że rozwój poznawczy dziecka jest warunkowany poziomem rozwoju emocjonalnego.

Zmiany w rozwoju fizycznym i motorycznym dziecka we wczesnej edukacji są mniej dynamiczne niż w wieku przedszkolnym. Wzmoczona aktywność ruchowa określana mianem „głodu ruchu” zaczyna stopniowo wygasać i dziecko w konsekwencji coraz dłużej i uważniej koncentruje się na wykonaniu jednej czynności. Ważny staje się efekt podejmowanych działań ruchowych, natomiast radość z samej aktywności przestaje już mieć duże znaczenie. Celowość, ekonomiczność i uporządkowanie ruchów sprawiają, że dziecko potrafi przyswoić złożone układy. Badacze twierdzą, że jest to najlepszy okres do rozpoczęcia uprawiania dyscypliny sportowej, nauki gry na instrumencie czy malowania (Trempała, 2011). Szybki rozwój i potrzeba wykonywania ruchów manualnych wskazują, że organizując dzieciom pracę, należy zadbać o kreowanie sytuacji, w których dziecko będzie mogło nie tylko odtwarzać znaki graficzne (nauka pisanie), ale również manipulować obiektami i tworzyć złożone układy na płaszczyźnie i w przestrzeni. Rysowanie, wycinanie, konstruowanie, układanie czy budowanie należy stale uwzględniać, organizując pracę na zajęciach matematycznych we wczesnej edukacji.

Obserwując wytwory pracy uczniów w kolejnych latach pierwszego etapu edukacyjnego, możemy dostrzec, że prace te z czasem stają się staranniejsze, dokładniejsze i zgodniejsze z oczekiwaniami nauczyciela. Począwszy od krzywych cięć i wciśniętego w kartkę śladu ołówka, przechodzimy do starannych rysunków i ilustracji, w których dominują kolory, uwzględniane są szczegóły czy dostrzegalna jest perspektywa. W tym okresie silnie rozwija się rozróżnienie między rysunkiem-ilustracją a rysunkiem-schematem. To właśnie ten drugi często wykorzystujemy podczas rozwiązywania zadań tekstowych złożonych. Konieczność odtwarzania kształtów, prowadzenia ołówka przy linijce, łączenia obiektów

w układy czy umiejętność posługiwania się przyborami szkolnymi powinna być doskonała od początku nauki szkolnej. I nie znajduje to tylko uzasadnienia w rysunku geometrycznym, gdyż nawet przy niewielkich zaburzeniach integracji percepcyjno-motorycznych liczne czynności wspomagające uczenie się matematyki odwracają uwagę dzieci od doświadczeń logicznych i matematycznych, potęgując tym samym trudności wyzwalające frustrację (Gruszczyk-Kolczyńska, 1992, s. 136–139).

Wiek przedszkolny to okres, w którym dzieci szeroko rozwijają swoje kompetencje społeczne. Przebywając przez większość dnia w grupie rówieśników, uczą się norm postępowania i relacji interpersonalnych. Kończąc wychowanie przedszkolne, mają już za sobą doświadczenia związane z nawiązywaniem kontaktów, zdobywaniem i utrzymywaniem pierwszych przyjaźni oraz angażowaniem się w działania grupy. Dostrzegają, które postawy należy przyjąć, aby stać się członkiem zespołu i być powszechnie akceptowanym (Eisenberg, Fabes, 1992). W okresie wczesnoszkolnym relacje w grupie rówieśniczej stają się dla nich bardzo ważne, a dominująca potrzeba bycia akceptowanym niejednokrotnie wymusza podporządkowanie własnych zachowań innym. Lęk przed odrzuceniem potrafi zdominować działania dziecka, które i tak są utrudnione koniecznością realizacji obowiązków związanych z nauką. Jest to okres szczególnie trudny, w tym czasie często rodzą się pierwsze lęki szkolne i mimo oczekiwanego wzrostu odporności psychicznej zdarza się, że dziecko wycofuje się z podjętych działań lub nie podejmuje ich wcale. Czujność i wsparcie ze strony osoby dorosłej winno wzmacniać poczucie skuteczności i motywować do osiągnięcia celów.

Wraz z rozpoczęciem nauki w klasie pierwszej dominującą aktywnością staje się zorganizowane uczenie się, w którym to gry i zabawy najczęściej przybierają charakter dydaktyczny. Ich celem nie jest już tylko wywoływanie poczucia zadowolenia, a urozmaicenie lekcji czy wsparcie przy opanowaniu treści zajęć. Działania dziecka w procesie edukacyjnym zostają skierowane na zdobywanie wiedzy. Znormalizowane i uporządkowane rytmem szkolnym stanowią ogromne wyzwanie. Zmiany w zakresie dominujących aktywności dziecka nie wynikają jednak tylko z konieczności rozpoczęcia nauki w szkole, są one naturalne i wiążą się z jego rozwojem. Dzieci zaczynają wyraźnie rozdzielać obowiązki szkolne, które traktują jako pracę, od zabawy, która staje się aktywnością wypełniającą ich czas wolny. To dziecięce postrzeganie relacji między pracą a zabawą jest wyraźnie dostrzegalne, gdy na lekcji pojawiają się gry i zabawy dydaktyczne. Możemy wtedy obserwować silny wzrost zaangażowania uczniów w pracę.

1.3. Oczekiwania formułowane wobec edukacji matematycznej

Mimo umiejętności scharakteryzowania postaw i zakresu działań nauczycieli nadal słyszymy o niedostatkach polskiej edukacji matematycznej, co oznacza, że to, co dzieje się w szkołach, nie tylko budzi wątpliwości, ale nie odpowiada naszym oczekiwaniom. Nakreślone we wcześniejszych rozważaniach postrzeganie rozwoju intelektualnego jednostki i najbardziej charakterystyczne zmiany dokonujące się w jego zakresie zarysowują obszar naszych oddziaływań edukacyjnych. Wskazują, jak należy rozumieć rozwój i jakim wymaganiom edukacyjnym mogą sprostać uczniowie wczesnej edukacji. Okazuje się, że wszystkie te zmiany implikują potrzebę wysokich kompetencji psychologicznych nauczyciela, które – oprócz wiedzy merytorycznej i dydaktycznej – są jednym z filarów gwarantujących dobrą edukację. Zatem, co niejednokrotnie zostało podkreślane, znajomość matematyki nie wystarcza do jej efektywnego nauczania. Trzy obszary kompetencji nauczyciela wczesnej edukacji, tj. psychologiczne, dydaktyczne i merytoryczne, a właściwie nieprawidłowe wykorzystywanie ich zasobów, generują główne zarzuty, które formułuje się pod adresem szkolnego procesu kształcenia matematycznego dzieci.

Wśród zarzutów kierowanych pod adresem edukacji matematycznej najczęściej pojawia się tzw. papierowa edukacja (por. Gruszczyk-Kolczyńska, 2016). Tym zwrotem określamy działania dydaktyczne skupiające się na realizacji podręczników i materiałów ćwiczeniowych przygotowanych przez wydawnictwa, czyli wykonywanie strona po stronie zadań i ćwiczeń w nich zawartych i zaczynanie kolejnych zajęć w miejscu, w którym uczniowie skończyli rozwiązywać poprzednie. I tak przez cały rok – w przekonaniu, że uczymy matematyki. Takie podejście do nauczania matematyki ma niewątpliwie swoje plusy, m.in. łatwość organizacji lekcji. Pracując z podręcznikiem, który powstał jako obudowa do programu nauczania zgodnego z podstawą programową kształcenia ogólnego, mamy przeświadczenie, że kwestie monitorowania jej realizacji już nam zapewniono. Ponadto autorzy podręczników uwalniają nauczycieli od konieczności analizy treści matematycznych opisanych w podstawie w postaci wymagań szczegółowych pod kątem kolejności ich wprowadzania, analizy rzeczywistych możliwości umysłowych uczniów, tworzenia planów dydaktycznych, doboru zadań do zgłębiania przez uczniów danego zagadnienia, poszukiwania i respektowania w praktyce edukacyjnej prawidłowości obejmujących kształtowanie rozpatrywanych podczas lekcji pojęć matematycznych i kształconych umiejętności czy

wreszcie konieczności uwzględniania perspektywy własnych działań dydaktycznych w zakresie kształcenia matematycznego. Ponadto ograniczanie się do stron z podręcznika i zeszytów ćwiczeń daje nauczycielom poczucie panującego ładu procesu nauczania, wskazuje na jego pozorną intensyfikację mierzoną dużą liczbą zrealizowanych zadań, ułatwia organizowanie lekcji i osiąganie szybkich efektów sprawdzanych narzędziami przygotowanymi zazwyczaj przez autorów podręczników (Gruszczyk-Kolczyńska, 2016). Pomijając te elementy pracy nauczyciela, okazuje się, że organizacja środowiska uczenia się uczniów matematyki pozostaje w gestii autorów podręczników. I tylko od nich zależy, jak lekcje matematyki będą wyglądały. Czy takie rozwiązanie jest wystarczające? Okazuje się, że nie (Gruszczyk-Kolczyńska, 2016). Wśród wielu zarzutów pod adresem papierowej edukacji matematycznej znalazło się pomijanie wstępnej matematyzacji sytuacji doświadczanych przez dzieci, której znaczenie podnosi Z. Krygowska, uznając ją za ważny etap kształtowania się myślenia matematycznego (Krygowska, 1979, s. 49 i dalsze). Papierowa matematyka nie sprzyja również procesowi interioryzacji, skracając uczenie się matematyki do budowania struktur umysłowych opartych na reprezentacjach ikonicznych i symbolicznych. Samo ograniczanie zakresu poznawczego do kontekstów i treści zamieszczonych w podręcznikach powoduje zubożenie zasobu dziecięcych doświadczeń, tak istotnych dla prawidłowego rozwoju. Dążąc do jakości kształcenia matematycznego, podręcznik powinniśmy zatem sprowadzić do roli pomocy dydaktycznej, a to wymaga zmiany podejścia do samego nauczania oraz zmiany podręczników. Jakich zmian powinniśmy oczekiwać, skoro chcemy, aby nasi uczniowie na lekcji budowali stabilne, trwałe i zrozumiałe dla nich fundamenty matematyki? Jednym z rozwiązań, które narzuca się w kontekście papierowej edukacji matematycznej, jest stworzenie podręcznika-przewodnika towarzyszącego dziecku w poznawaniu matematyki. Bo skoro nie możemy pozbyć się jego wiodącej roli, to zadbajmy, aby sprostął oczekiwaniom edukacji XXI wieku.

Kolejnym istotnym zarzutem formułowanym pod adresem edukacji matematycznej jest niezrozumienie idei i zamierzeń nauczania zintegrowanego. Niewątpliwie związki matematyki z wieloma dziedzinami wiedzy są oczywiste i nie ma konieczności ich dowodzenia. To właśnie z powszechnego występowania matematyki w wielu aspektach życia wynika potrzeba jej łączenia z innymi edukacjami. Jednak łączenie, moim zdaniem, powinno koncentrować na użyteczności matematyki, nie na usilnym spajaniu treściowym czy metodycznym. Przypomnijmy, że sama idea nauczania zintegrowanego nie koncentrowała się

na łączeniu treści z różnych dziedzin. Jej podstawą miała być integracja wiedzy z różnych zakresów przy zapewnieniu indywidualizacji kształcenia oraz koncentracja na myśleniu i aktywności dzieci wokół określonych zagadnień. A to początkiem myślenia o integracji czyniło refleksję nad zainteresowaniami dziecka i warunkami, które sprzyjają rozwojowi jego sfer psychofizycznych. Eksponowana silnie aktywność poznawcza miała stanowić podstawę praktyki edukacyjnej, a w pracy organizowanej w małych grupach dopatrywano się nie tylko wzrostu umiejętności społecznych, ale również motywacji i poczucia współodpowiedzialności za osiągnięte cele (Cackowska, 1993; Galant, 1994; Siwek, 2004).

Skąd zatem obawy przed integrowaniem matematyki z innymi naukami na pierwszym etapie edukacyjnym? Myślę, że wszystko skupia się w przestrzeni indywidualnych interpretacji i przekonań będącej pomostem między teorią a praktyką. Przestrzeń ta odpowiada nie tylko za urzeczywistnianie idei, ale także za rozdzźwięk między zwolnikami a przeciwnikami proponowanego rozwiązania. Tak też dzieje się w postrzeganiu nauczania zintegrowanego, które obejmuje kształcenia matematyczne. Wśród argumentów potwierdzających słuszność nauczania matematyki w systemie zintegrowanym wymienia się możliwość dokonywania odkryć matematycznych obejmujących najbliższe doświadczenia dziecka, tj. z otaczającego je środowiska, oraz podkreśla się, że dzięki powiązaniu tych odkryć z dostrzeganymi problemami ukazujemy uczniom w naturalny sposób stosunki ilościowe, przestrzenne i metryczne, z którymi spotykają się na co dzień (Siwek, 2004). Na niekorzyść takiego rozwiązania przemawia fakt, że matematyka nie może być sztucznie łączona z innymi przedmiotami za pomocą zadań pojawiających się jako realizacja treści matematycznych w kontekście bloków tematycznych, np. dotyczących świąt czy pór roku (Galant, 1994; Gruszyk-Kolczyńska, 2016; Klus-Stańska, Nowicka 2013; Michalak, 2011). Specyficzne cechy matematyki wymuszają przemyślany dobór i następstwo tematów, a fragmentaryzacja treści w przypadku matematyki nie jest dydaktycznie poprawnym rozwiązaniem (Galant, 1994; Filip, Rams, 2000; Treliński, 2015). Podkreśla się, że nauczanie zintegrowane wymaga myślenia interdyscyplinarnego, które niestety musi poprzedzać duża dojrzałość intelektualna i rozległa wiedza, której nie można oczekiwać od uczniów w klasach I–III szkoły podstawowej. Zdaniem Doroty Klus-Stańskiej problem ten „wynika z mylenia synkretycznej percepcji zmysłowej ze zdolnością do myślenia interdyscyplinarnego” (Klus-Stańska, Nowicka, 2013, s. 215). Ponadto budowanie i wplatanie zadań matematycznych, których strona semantyczna jest zgodna z tematyką obejmującą dane zagadnienie,

nie tylko nie sprzyja budowaniu scalonego obrazu rzeczywistości, lecz pokazuje matematykę jako uzupełnienie wiedzy z danego zakresu o umiejętność rachowania. Kształtowanie rozumienia wykonywanych działań arytmetycznych nie sprowadza się do wykonywania rachunków z pomięciem zależności występujących między odjemną i odjemnikiem czy w odniesieniu do sumy. To wiązanie matematyki z konkretnymi przykładami ma jeszcze jeden, istotny minus. Uczenie się matematyki we wczesnej edukacji rozpoczynamy od sytuacji konkretnych, od manipulowania obiektami rzeczywistymi. Celem jest tu ukształtowanie pojęcia czy dostrzeżenie regularności matematycznej, a to proces długotrwały, wymagający realizacji systematycznego kształcenia matematycznego. Koncentrowanie się na dobieraniu zdań pasujących do tematu nie sprzyja osiąganiu wyższego poziomu myślenia niezbędnego przy kształtowaniu pojęć abstrakcyjnych.

Kolejnym istotnym niebezpieczeństwem w kontekście nauczania matematyki w edukacji wczesnoszkolnej jest stosunek nauczycieli do tego przedmiotu. W literaturze możemy odnaleźć badania potwierdzające, że brak pozytywnych doświadczeń w uczeniu się matematyki lub trudności, na które natknęto się w trakcie nauki szkolnej, wywołują niechęć do matematyki i potrzebę jej unikania (Cipora, 2015; Nawolska, Żądło-Treder, 2017). Kształtujący się na bazie własnych doświadczeń szkolnych stosunek do matematyki i oddziaływania zewnętrzne mogą przyczynić się nie tylko do niskiego poziomu naszych przyszłych osiągnięć z tej dziedziny, ale także wzbudzić niechęć do korzystania z jej zasobów. Aby uniknąć tego zagrożenia, należy z wielką dbałością kształtować stosunek do matematyki już od pierwszych lekcji. To trudne wyzwanie staje przed nauczycielami edukacji wczesnoszkolnej, a ich starania powinny koncentrować się na niedopuszczeniu do powstania błędnego koła, w którym ich nierozumienie matematyki przekłada się na uczniowskie trudności w uczeniu się tego przedmiotu (Urbańska, 1996). Bardzo długo sądzono, że lęk przed matematyką pojawia się w starszych klasach, kiedy kontakt z nią jest już na poziomie operacji formalnych i czas jej doświadczania jest dłuższy (Krinzinger, Kaufmann i Willmes, 2009; Maloney i Beilock, 2012). Okazuje się jednak, że może się on pojawiać już na początku nauki szkolnej (Jameson, 2013). Wynika stąd potrzeba kształtowania już od najmłodszych lat pozytywnego stosunku do matematyki. I nie chodzi tylko o niwelowanie początkowych źródeł lęku, a raczej o współwystępującą potrzebę pokonania narastających wraz z lękiem trudności ujawniających się podczas rozwiązywania zadań (Jameson, 2013; Ramirez, Gunderson, Levine i Beilock, 2013; Wu, Barth, Amin, Melcarne i Menon, 2012).

W badaniach obejmujących nauczanie matematyki pojawia się wiele innych zarzutów, chociażby niewykorzystanie dotychczasowych doświadczeń dzieci w toku realizacji zadań szkolnych oraz ich potocznego rozumienia obiektów i zależności matematycznych (Klus-Stańska, 2000) czy ograniczanie rozwoju myślenia matematycznego uczniów (Dąbrowski, 2009; Kalinowska, 2014b; Klus-Stańska, Nowicka, 2013), które prowadzi do analfabetyzmu matematycznego (Legutko, 1996), lub zjawiska bezmyślności matematycznej (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004). Wskazuje się również na ograniczanie wolności mentalnej uczniów w procesie uczenia się matematyki oraz brak zaufania wobec możliwości poznawczych i umiejętności uczniów (Nowicka, 2103). Podczas lekcji brakuje sytuacji, w których uczniowie mogliby swobodnie posługiwać się językiem matematycznym, zatracając w ten sposób możliwość stopniowego nabywania tej umiejętności (Dąbrowski, 2009). W raporcie dotyczącym badań nauczania matematyki w szkole podstawowej przygotowanym przez Pracownię Matematyki IBE podkreślano, że nauczyciele edukacji wczesnoszkolnej nie dostrzegają spójności matematyki, a prowadzone w ramach edukacji matematycznej zajęcia koncentrują się na drobnych celach opisanych w postaci wymagań szczegółowych w podstawie programowej, które nauczyciele traktują jako listę ćwiczeń wyznaczonych do realizacji. Badania te potwierdzają również spostrzeżenia E. Gruszczyk-Kolczyńskiej o realizacji tzw. papierowej edukacji wyznaczonej przyjętym do realizacji na dany etap kształcenia podręcznikiem oraz podkreślają wyraźnie dostrzegalną niepewność nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej na polu matematyki, maskowaną często poprzez wydawanie dyrektyw lub podsuwanie uczniom gotowych rozwiązań. Dostrzeżono wyraźnie dominującą rolę nauczyciela, która powodowała, że podczas lekcji uczniowie mieli mało sposobności do zadawania pytań, weryfikowania własnych pomysłów na rozwiązanie zadania czy inicjowanie własnych strategii rozwiązywania problemów. Najbardziej niepokojący jest jednak wniosek, że zarówno uczniowie, jak i nauczyciele postrzegają naukę matematyki jako ćwiczenia skoncentrowane na wyrabianiu sprawności rachunkowej (Karpiński, Zambrowska, 2014). A przecież sprawność rachunkowa jest jedną, ale nie jedyną kompetencją matematyczną na tym etapie edukacyjnym.

Zresztą nie tylko w badaniach polskich dostrzegane są niedostatki kształcenia matematycznego w początkowych klasach szkoły podstawowej. Mówi się również o niepełnej wiedzy nauczycieli w zakresie kształtowania pojęć i umiejętności matematycznych (Güven, Colak, 2019) czy potrzebie doksztalcenia ich w zakresie dziecięcego myślenia i rozumowania matematycznego (Copley, 2004). Jo Boa-

ler podkreśla, że jednym z większych problemów pojawiających się w praktyce szkolnej są indywidualne relacje z matematyką, których doświadczyli nauczyciele. To ich edukacja w przestarzałym systemie rzutuje na obecną praktykę zawodową i często jest powodem powtarzanych schematów nauczania z dzieciństwa (Boaler, 2016). Matematyka jest performansem, żywym aktem, sposobem przedstawiania świata i wielogodzinne ćwiczenie tych samych zadań nie pozwoli nikomu na dostrzeżenie, czym tak naprawdę jest. Kontynuowanie takiego kształcenia matematycznego niestety tylko pozornie słabnie. Boaler uważa, że uczniowie potrzebują angażować się, działać, wykonywać i rozwiązywać problemy na lekcjach matematyki, bo pominięcie tak ważnego aspektu pracy uczniów nie pozwoli im na późniejsze wykorzystanie wiedzy w innych sytuacjach (Boaler, 2015).

Zarzuty formułowane pod adresem edukacji matematycznej dziecka implikują w bardzo jasny sposób oczekiwania wobec edukacji matematycznej. Stojąc na stanowisku, że uczenie się wymaga samodzielnej pracy mózgu, a intensyfikacja i pogłębianie rozumienia danego zagadnienia lepiej utrwała się w pamięci (Spitzer, 2015), należałoby w działaniach szkolnych koncentrować się na aktywnym zdobywaniu wiedzy, łącząc ją z już posiadaną, zapewniając w taki sposób integrację kolejnych informacji ze strukturami wiedzy. Ponadto należałoby zabiegać o budowanie skomplikowanych struktur matematycznych opartych na hierarchicznym organizowaniu jej prostych elementów, dbać o budowanie wiedzy w umyśle na podstawie relacji i struktur wiedzy świata zewnętrznego (Schneider, Stern, 2013) oraz angażować emocje, motywować i wierzyć w możliwości uczniów (Schleicher, 2019).

Urszula Oszwa jest zdania, że najważniejszej realizowana edukacja matematyczna powinna prowadzić do rozumienia na wysokim poziomie jej treści przy jednoczesnym nabywaniu dużej biegłości w rachunkach i stosowaniu adekwatnych procedur liczenia (Oszwa, 2006). Jest to duże wyzwanie dla nauczycieli, których indywidualne doświadczenia szkolne ugruntowały postrzeganie matematyki jako dziedziny koncentrującej się na sprawności rachunkowej. Trenowanie mechanizmów obliczeniowych do momentu pamięciowego opanowania wyników najczęściej pojawiających się podczas zajęć przykładów nie tylko nie jest zgodne z założeniami kształcenia matematycznego, lecz – co więcej – nie ma nic wspólnego z matematyką. Wśród oczekiwanych działań skutecznej edukacji matematycznej na pewno możemy wyróżnić (Harper, Daane, 1998; Klus-Stańska, Nowicka, 2013; Hinton, Strozier, Flores, 2014):

- zaniechanie mechanicznego trenowania wyizolowanych umiejętności matematycznych poprzez wykonywanie dużej liczby podobnych i typowych zadań,

- docenianie i wykorzystywanie dotychczas zgromadzonych doświadczeń dziecka i ich intuicji matematycznej pojawiającej się podczas nadawania znaczeń ich własnym doświadczeniom,
- unikanie narzucania metod i sposobów rozwiązywania zadań oraz pośpiesznego podawania gotowych rozwiązań,
- przyjmowanie pojawiających się błędów uczniowskich jako naturalnych elementów procesu uczenia się i uczynienie ich początkiem ciekawych dyskusji i rozważań,
- uznanie, że uczenie się matematyki to nie pośpieszna dążność do wyniku, ale proces wyzwalaający twórcze rozumowanie matematyczne,
- zabieganie o wskazanie użyteczności matematyki w sytuacjach codziennych, dzięki czemu uczniowie mogą utwierdzić się w celowości podejmowanych przez nich działań,
- budowanie dziecięcych umysłowych struktur matematycznych, rozpoczynając od wskazywania zależności i regularności w otaczającej nas rzeczywistości, a później opisywanie ich za pomocą matematyki (nie odwrotnie, jak wówczas, gdy uczniowie poznają matematyczne pojęcie obwodu prostokąta, a następnie sprawdzają, jak w przedłożonych im zadaniach mogą to wykorzystać); to właśnie dopasowywanie matematyki do rzeczywistości ukazuje ją jako bezużyteczną, więcej – czyni ją sztucznym tworem, który nauczyciel usilnie stara się dopasować do sytuacji, z jakimi można się spotkać w życiu codziennym,
- przesunięcie wysiłków nauczyciela z opanowywania algorytmów na ich poszukiwanie i konstruowanie.

Na szczególne wyróżnienie zasługuje bardzo ważne działanie, czyli osvajanie, którego istotą jest kształtowanie pozytywnych skojarzeń emocjonalnych z matematyką (Dąbrowski, 2008; Gruszczyk-Kolczyńska, 1992; Klus-Stańska, Nowicka, 2013).

Warto podkreślić, że edukacji matematycznej dziecka nie powinno się ograniczać jedynie do działań szkolnych. Należy ją postrzegać w szerokim kontekście psychospołecznym i budować płaszczyznę oddziaływań matematycznych w grupie wszystkich zainteresowanych prawidłowym rozwojem dziecka. Poza-szkolnej pomocy wspierania kształtujących się kompetencji matematycznych dziecka powinniśmy szukać w gronie jego najbliższych osób. To właśnie angażowanie się rodziców w pozaszkolne oddziaływania będzie kontynuacją i przedłużeniem pracy szkoły. Taką formą pomocy ze strony rodziców może być odpowiedni dobór zabawek czy zachęcanie do podejmowania wysiłku intelektualnego poprzez organizowanie zabaw, w których występują elementy matematyki (Sepehrianazar,

Babae, 2014; Vukovic, Roberts, Wright, 2013). Rola psychologów współpracujących ze szkołą nie powinna ograniczać się do dokonywania diagnozy uczniowskich osiągnięć czy lęku przed matematyką, ale ich głównym celem powinno być wsparcie chociażby w formie treningu relaksacyjnego (Beilock, 2008; Chodura, Kuhn, Holling, 2015). Wsparcie pedagogów natomiast powinno polegać na oferowaniu alternatywnych rozwiązań dydaktycznych mogących nie tylko uatrakcyjnić zajęcia matematyczne, ale sprawić, aby dziecięce doświadczanie matematyki wiązało się z sukcesami codziennych postępów dziecka (Trezise, Reeve, 2014).

Niewątpliwie to na nauczycielach edukacji wczesnoszkolnej spoczywa obowiązek budowania zrozumiałych, trwałych i użytecznych fundamentów matematyki, a to nie tylko wiąże się z dobrze zorganizowaną lekcją. Raczej będziemy tu mówić o budowaniu środowiska uczenia się matematyki, które oprócz właściwych rozwiązań metodycznych nacechowane jest pozytywnym nastawieniem do matematyki, przekonaniem o jej użyteczności, wyzwalaniem ciekawości poznawczej i podtrzymywaniem zaangażowania w podejmowanych przez dzieci aktywnościach matematycznych (Butterworth, 1999). To właśnie dobre lekcje matematyki pozwalają odkrywać regularności, eksperymentować, badać i doświadczać, uczą logicznego myślenia i wspierają dążenia do rozwiązywania problemów (Gruszczyk-Kolczyńska, Zielińska, 1997). Zachęcają dzieci do uzasadniania własnego stanowiska czy rozbudzają na początkowym etapie szkolnego kształcenia matematycznego fascynację i rozwijają pasję. W literaturze możemy odnaleźć wiele ciekawych propozycji wspierających kształtowanie pożądanых postaw wobec matematyki (Dąbrowski, 2008; Gruszczyk-Kolczyńska, Zielińska, 1997; Hinton i in., 2014; Isiksal i in., 2009; Kim i in., 2016; Klus-Stańska, Nowicka, 2013; Korolczuk, Zamborska, 2014). Wśród tych rozwiązań odnajdziemy: zagadki matematyczne, sytuacje zadaniowe wymagające zastosowania matematyki, badanie obiektów w otaczającej rzeczywistości, zachęcanie do poszukiwań własnych sposobów rozwiązania zadań, stawianie wymagających zadań wyzwalaających potrzebę eksperymentowania, stawianie pytań, wyjaśniania wątpliwości poprzez dyskusowanie o różnych rozwiązaniach, a przede wszystkim wyzwalaających samodzielność intelektualną uczniów.

1.4. Wymagania konstruktywistycznego podejścia do nauczania matematyki

Jak wspomniałam, dużo mówi się o niewłaściwej organizacji szkolnego nauczania edukacji matematycznej. Nie doszukuję się w niej złej woli nauczycie-

li, raczej uważam ją za konsekwencje ich własnych doświadczeń szkolnych, niewystarczającego przygotowania do nauczania matematyki, niechęci wobec tego przedmiotu czy nawet lęku przed matematyką (Cipora, 2015). Do kolejnych zaliczyłabym zbytnią koncentrację na wymaganiach szczegółowych, jakby one były istotą kształcenia matematycznego, oraz nieuwzględnianie narracji, która praktycznie nie pojawia się na lekcjach matematyki. Nieusatysfakcjonowani obecnym stanem szkolnych praktyk edukacyjnych w zakresie matematyki poszukujemy rozwiązań, które pozwolą zniwelować niedostatki kształcenia tej fascynującej dziedziny wiedzy. Czy pytania o zmianę nauczycielskich poglądów na edukację matematyczną i zwrot w kierunku konstruktywistycznego podejścia do nauczania będą wystarczającym rozwiązaniem?

Konstruktywizm uznano za potężne alternatywne źródło podejścia do nauczania tradycyjnego (Confrey, 1990). Najprościej ujmując, konstruktywizm jest teorią, która uznaje wszelką wiedzę człowieka za jego własny wytwór. Nasze rozumienie otaczającej rzeczywistości jest konstruowane poprzez doświadczenia i to właśnie charakter naszych doświadczeń ma wpływ na nasze konstrukty poznawcze. Prace Piageta dostarczyły jednej z kluczowych podstaw konstruktywizmu. Badacz wykazał, że dziecko postrzega świat zupełnie inaczej niż osoba dorosła. Na tę inność składa się właśnie ilość i różnorodność doświadczeń, a uwidaczniające się różnice w postrzeganiu idei matematycznych nie dają się po prostu zredukować poprzez uzupełnienia braków. Dziecięce idee, jak podkreśla Piaget, są odmienną niż u dorosłego formą argumentacji. Są zbudowane z różnych struktur myślowych i oparte na innych doświadczeniach. Dziecięce postrzeganie matematyki różni się jakościowo od postrzegania osoby dorosłej i żadne zapewnienia oraz tłumaczenia dorosłego nie zastąpią mu własnego dochodzenia do wiedzy matematycznej. W podejściu konstruktywistycznym do nauczania nie tylko własne konstrukty myślowe są istotne, ale świadomość tego, jak przebiegają, jakie dają możliwości poznawcze i na które nasze potrzeby edukacyjne odpowiadają. To właśnie świadoma refleksja powinna nam towarzyszyć w konstruowaniu wiedzy (Confrey, 1990).

Sam konstruktywizm często jest poddawany krytyce z powodu nadmiernego relatywizmu. Głównym zarzutem formułowanym pod jego adresem jest niemożność uwolnienia się z niewoli własnych konstruktów. A mianowicie, skoro konstrukty są wynikiem własnej aktywności jednostki i tylko one są odpowiedzialne za ich powstanie, to jak skonfrontować je z rzeczywistością, skoro dla każdego z nas nasze własne są jedyne i niepowtarzalne. Brak możliwości konfron-

tacji z innymi i niemożność dokonania oceny wskazują na ważność ich wszystkich, bez względu na to, do kogo należą. Konstruktywiści odpierają zarzuty w następujący sposób:

1. Proces konstruowania znaczeń podlega wpływom społecznym. Nie myślimy w odizolowaniu. Wszystkie nasze działania aktywowane podczas rozwiązywania problemów znajdują się pod wpływem języka, którym się posługujemy, według przyjętych i zewnętrznie akceptowalnych metod, a wybór dostępnych społecznie zasobów pozwalających rozwiązać problem jest uwarunkowany zarówno wpływami społecznymi, jak i indywidualnymi.
2. Proces konstruowania znaczeń jest zależny od procesu komunikacji. Ma to związek z konstruktami innych osób. Za pomocą funkcjonującego procesu komunikacji z jednej strony ludzie oceniają zgodność między swoimi konstruktami, a z drugiej oceniają siłę konstruktów innych osób, przyjmując je jako niezależny system. W nauczaniu matematyki nauczyciel staje przed koniecznością zbudowania uczniowskiego modelu rozumowania, uwzględniając jego dotychczasową wiedzę, i ocenia jego zgodność z własnym. Dlatego konstruując proces kształcenia, nauczyciel musi brać pod uwagę możliwości poznawcze ucznia i właściwie dostosować instrukcję (Davis, Maher, Noddings, 1990).

W podejściu konstruktywistycznym do nauczania matematyki nie ograniczamy się do struktur matematycznych, lecz wskazujemy swoim uczniom, jak mają rozwijać własne poznanie, jak patrzeć na świat poprzez pryzmat własnych konstruktów myślowych, jak je analizować i rozbudowywać, aby stały się silniejsze i trwalsze. Uczymy doceniać znaczenie konstruktów myślowych dla rozwoju kulturalnego oraz posługiwać się nimi jak narzędziami intelektu.

Wszystkie przywołane w tym rozdziale poglądy na rozwój umysłowy człowieka wpisują się w nurt konstruktywistyczny. Przyjmując stanowisko, że wiedza powstaje w wyniku aktywnego działania dziecka i jest konstruowana w jego umyśle, należałoby scharakteryzować nauczanie jako działania dydaktyczne umożliwiające dziecku odkrywanie wiedzy i skuteczne posługiwanie się nią. Zadaniem nauczyciela w tym podejściu jest organizowanie takiej rzeczywistości matematycznej, która będzie aktywizowała uczniów do działań twórczych. Wcielaając się w rolę partnera poznawczego towarzyszącego dziecku, nauczyciel powinien zabiegać, aby uczeń przejmował odpowiedzialność za własne uczenie się. Nowa wiedza matematyczna stanowiąca treść lekcji musi wyraźnie nawiązywać do jego dotychczasowych doświadczeń, rozbudowując lub przekształcając dotychczas istniejącą. Wyjaśnianie treści matematycznych nie może zastąpić samodzielnego

dochodzenia do wiedzy. Należy pamiętać, że nawet bardzo dokładne tłumaczenie zobrazowane konkretnymi przykładami nie dostarczy radości z poznania. Porównywanie, dostrzeganie podobieństw i różnic, kategoryzowanie czy formułowanie spostrzeżeń na podstawie własnych działań umożliwia dzieciom kształtowanie wiedzy matematycznej na swój własny, charakterystyczny dla danej jednostki, sposób. W takim podejściu przed nowymi pojęciami matematycznymi kroczy rozumienie, a to – jak wiemy – jest podstawą myślenia matematycznego (Dąbrowski, 2008). Ważnym przesłaniem dla praktyki edukacyjnej jest konieczność organizacji różnorodnych doświadczeń, wspartych różnymi pomocami dydaktycznymi, uwzględniającymi różne formy organizacyjne pracy na lekcji czy różne metody i techniki. Bez tego nie można uwzględniać indywidualnych różnic między ludźmi. W podejściu konstruktywistycznym do nauczania uznaje się różnorodność za zjawisko powszechne, a jednakowe uczenie się przy jednoczesnym oczekiwaniu takich samych rezultatów za niemożliwe.

Matematykę postrzeganą jako zbiór reguł i procedur wnioskowania opracowanych i naukowo usankcjonowanych możemy zgłębiać na skrajnie różne sposoby. Wyłaniające się dwa przeciwstawne modele, tj. uczenie się konstruktywistyczne i niekonstruktywistyczne, ujmują nabywanie kompetencji lub zdolności matematycznych w zgoła odmienny sposób. Niekonstruktywistyczny sposób podstawą czyni przyjmowanie kolejnych porcji wiedzy matematycznej w planowy sposób, zmierzający do opanowania pamięciowego definicji, twierdzeń, reguł i własności, które zgodnie z wypracowanym algorytmem należy wykorzystywać podczas rozwiązywania zadań. Nadmierne poleganie na twierdzeniach i egemplifikacja reguł w procesie kształcenia prowadzi do rutynowości procesów myślowych wywołujących ich usztywnienie. W dziecięcym uczeniu się matematyki postrzegane jest to jako brak umiejętności spojrzenia na zadanie z innej strony, jako nieumiejętność wyobrażenia sobie sytuacji, w której moglibyśmy spotkać się z takimi warunkami, jako niedostrzegalność bardziej eleganckich rozwiązań, a co więcej – brak potrzeby ich poszukiwania.

Koniecznością nauczyciela staje się korzystanie z wielu podejść, nie tylko tych odwołujących się do własnych doświadczeń szkolnych i uznanych przez siebie za najlepsze. Obowiązkiem dydaktycznym jest prowokowanie sytuacji, w których uczeń sam wykrywa wzorce oraz formułuje i weryfikuje przypuszczenia. Ten drugi sposób obejmujący samodzielne konstruowanie wiedzy poprzez uczestnictwo w sytuacjach sprzyjających odkrywaniu jest właśnie istotą konstruktywistycznego modelu uczenia się. Gerald A. Goldin twierdzi, że „konstruktywne

procesy uczenia się są bardziej efektywne, prowadzą do szerszego uogólniania wiedzy, lepszej retencji, większego prawdopodobieństwa, że wiedza zostanie przeniesiona do nieznanych sytuacji rozwiązywania problemów” (Goldin, 1990, s. 42). Jednocześnie uczuła nas, że nie musimy przyjmować wszystkich założeń radykalnego konstruktywizmu, by uznać, że uczenie się poprzez odkrywanie, myślenie dywergencyjne czy rozwiązywanie problemów przynosi lepsze efekty bez względu na różnice indywidualne naszych uczniów (Goldin, 1990).

Niestety w szkołach rzadko możemy obserwować uczniów odkrywających matematykę. Powodów może być tak naprawdę wiele, począwszy od niewystarczających matematycznych kompetencji nauczycieli do postrzegania przez nich matematyki jako zbioru reguł i procedur do opanowania. Jednak myślę, że to nauczycielska niepewność matematyczna jest częstym powodem, dla którego nauczyciele chętniej odwołują się do znanych sobie procedur i algorytmów, łudząc się jednocześnie, że to właśnie takie postępowanie pozwoli na utrzymanie kontroli nad uczniowskim poznawaniem tego przedmiotu. Możemy też przyjąć wielce optymistyczną wizję niezwykłych zdolności matematycznych nauczycieli, która utrudnia im dostrzeganie złożoności rozumowania, modelu rozwiązania czy stosowanych heurystyk. W konsekwencji swoje wyniki nauczyciele opisują w formie gotowego produktu lub wydajnej i skutecznej procedury prowadzącej do rozwiązania. Innym powodem może być rzekoma oszczędność czasu, bo podanie gotowej, usankcjonowanej wiedzy pozwala na oszczędzanie czasu, a uczniowskie odkrywanie niestety ten czas pochłania. Myślę jednak, że to nie oszczędność czasu jest główną przyczyną, ale najczęstszym argumentem, z którym się spotkałam. Uważam, że to umiejętność widzenia matematyki jako przestrzeni bytowania wyzwala w nas potrzebę jej doświadczania. Traktowanie jej jako zbioru narzędzi nie zmienia. Oczywiście pozostaje jeszcze kwestia testów zewnętrznych, które skłaniają nauczycieli do ćwiczenia technik rozwiązywania zadań najczęściej pojawiających się w ocenianiu zewnętrznym. Ktoś mógłby powiedzieć, że przecież po pierwszym etapie edukacyjnym nie ma obowiązkowego oceniania zewnętrznego w postaci egzaminów czy sprawdzianu. Jednak w szkołach stałą praktyką dyrektorów jest ocenianie kompetencji zawodowych nauczycieli, m.in. na podstawie oferowanych przez różne wydawnictwa testów kompetencji uczniów kończących klasę trzecią szkoły podstawowej. Jak zatem oprzeć się takiej presji? Można, ale trzeba być przekonanym o efektywności uczenia się matematyki w modelu konstruktywistycznym. Owo przekonanie niestety może wynikać tylko z własnych doświadczeń nauczyciela. Jak zatrzymać to błędne koło?

Carolyn A. Maher i Robert B. Davis proponują, aby uzyskać jak największą wiedzę o pomysłach uczniów. Podczas pracy na lekcjach wnikliwie ich obserwować i starać się zrozumieć ich myślenie. Zabiegać o tzw. przedłużanie rozumowania prowadzącego do rozwiązania poprzez sprawdzanie poprawności rozwiązania w zmienionych warunkach zadaniowych. Uwzględniać pomysły uczniów pojawiające się podczas rozwiązywania problemów. Analizować i próbować zrozumieć, co robią uczniowie, dlaczego to robią, bo to stanowi podstawę wglądu w naturę rozwoju dziecięcych wyobrażeń. Analiza dziecięcych konstrukcji myślowych pojawiających się podczas rozwiązywania zadania może dostarczyć informacji o rozumieniu pojęć matematycznych czy tworzonych przez nich reprezentacji. Uzyskana w taki sposób wiedza pozwoli na odpowiednie modyfikowanie zajęć dla uczniów. Pogląd, który reprezentują Maher i Davis, ukazuje inną rolę nauczyciela, w której podstawą działalności dydaktycznej ma stać się rozwój własnych kompetencji i pewności siebie. To one, wsparte wynikami i analizą obserwacji dziecięcych dróg poznania matematycznego, mają pomóc w planowaniu i organizowaniu lekcji opartych na interakcji między uczniami i nauczycielem (Maher, Davis, 1990).

Leslie P. Steffe zwraca uwagę na konieczność zmiany światopoglądu nauczycieli matematyki. Nauczycielskie przekonania o statyczności i niezmienności tej dyscypliny naukowej muszą konwertować w kierunku myślenia o matematyce jako działalności człowieka. Odpowiedzialność za wybór podejścia do nauczania matematyki, która spoczywa na nauczycielach, czyni ich jedynymi realnymi inicjatorami zmian w klasie szkolnej. Steffe przekonuje, że konieczność dokonania wyboru podejścia do nauczania matematyki sprawi, że nauczyciele staną się aktywni matematycznie, będą poszukiwać nowych rozwiązań czy weryfikować swoje poglądy na nauczanie. Jednak wszystko to jest możliwe tylko wtedy, gdy nauczyciele zaakceptują, że wiedza matematyczna ich uczniów jest równie ważna jak ich własna, a aktywność uczniowska podczas zajęć kluczowa w poznawaniu matematyki (Steffe, 1990). Ponadto Paul Cobb, Terry Wood i Erna Yackel podkreślają potrzebę konstruowania kontekstów społecznych, w których to uczniowie i nauczyciele mogą uczyć się od siebie nawzajem (Cobb, Wood, Yackel, 1990).

Zmiany, które chcemy uzyskać w klasie szkolnej, muszą obejmować również zmiany w podejściu do kształcenia nauczycieli. Skoro doświadczenie w uczeniu się matematyki jest tak ważne, to musimy zadbać, aby przyszli nauczyciele w trakcie przygotowywania się do zawodu mogli stać się uczestnikami takich doświadczeń. Jednak nie chodzi tu o wyćwiczenie pewnych doświadczeń schematycznie, by dać gotowe narzędzie do zastosowania w klasie. Te doświadczenia powinny raczej

skupiać się na takich problemach, które pozwolą myślenie przyszłych nauczycieli uczulić na to, jak inni mogą podchodzić do rozwiązania, jakie nieporozumienia mogą pojawić się w wyniku dyskusji nad rozwiązaniem, które umiejętności sprzyjają rozwiązywaniu problemów, co jest ważne w planowaniu rozwiązania oraz jakie konsekwencje niesie za sobą pochoinnie przyjęta strategia rozwiązania. Jednym słowem – nauczyciele muszą zrozumieć, co próbują zrobić ich uczniowie i od jakich pomysłów zaczynają. Wszyscy wiemy, że nie ma gotowej recepty na dobre nauczanie matematyki, a przyjęcie podejścia konstruktywistycznego jest wymagającym rozwiązaniem, tj. wymaga gruntownej zmiany w myśleniu o uczeniu się uczniów i nauczaniu. Najlepiej tej zmiany doświadczyć, uczestnicząc w sytuacjach dydaktycznych, które zamierzamy projektować dla własnych uczniów.

Kolejną ważną kwestią są relacje, które należy budować między uczniami i nauczycielem. Doświadczenie sytuacji problemowych i odkrywanie prawidłowości matematycznych wymaga od uczestników procesu wytrwałości, umiejętności panowania nad negatywnymi emocjami i przezwyciężania trudności. Budowanie atmosfery obustronnego zaufania, poczucia bezpieczeństwa w małej społeczności skoncentrowanej na realizacji wspólnego celu pozwoli pokonać nie tylko dziecięce momenty zniechęcenia, ale również zbuduje w nich poczucie współodpowiedzialności za powodzenie przedsięwzięcia (Davis, Maher, Noddings, 1990). Tworzone w oddziale szkolnym relacje opierają się w dużej mierze na interakcjach między uczestnikami procesu. Dbałość o właściwą komunikację podczas zajęć wzmocni poczucie zadaniowości i zintegruje zespół. Ponadto komunikacja – jako złożony proces – ma pomóc nauczycielom w realizacji zadania, którym jest budowanie odpowiedniego modelu pracy na lekcji. Takiego, który pozwoli uczniom na inne spojrzenie – spojrzenie umożliwiające przekształcenie dziecięcych poglądów na takie, które będą bardziej adekwatne nie tylko z perspektywy uczniów, ale i nauczyciela (Davis, Maher, Noddings, 1990).

Dzieci przychodzą do szkoły z pewną wiedzą matematyczną, określaną mianem nieformalnej (Davis, Maher, Noddings, 1990; Klus-Stańska, 2000), powstałej w wyniku ich uczestnictwa w doświadczeniach kreowanych przez codzienność. Niejednokrotnie słyszymy, jak dziecko posługuje się liczbami, określa własne strategie obliczeniowe i próbuje porządkować zgromadzone informacje na swój matematyczny sposób. Oczywiście nie znaczy to, że możemy przyjmować określony poziom kompetencji matematycznych dziecka jako ukształtowany, raczej powinniśmy traktować to jako zdolność do aktywnego monitorowania i dostosowania swoich zachowań również w zakresie matematyki. Poszukując odpowiedzi na pytanie, skąd

u dzieci bierze się to naturalne zainteresowanie matematyką, wystarczy zwrócić się w kierunku natury, która uczyniła je ciekawymi wszystkiego, co się dookoła dzieje. Ta wewnętrzna, niczym niewymuszona motywacja skłania ich do poszukiwania wzorców i relacji. Oczywiście nie przemawia to za trwaniem w przekonaniu, że wszystkie dzieci będą zainteresowane matematyką, ale motywuje nas do wiary w ich aktywną, twórczą, czyli odkrywczą ścieżkę na drodze matematycznego poznania.

Dziecięce przeświadczenie o użyteczności nieformalnej wiedzy matematycznej zostaje poprzez włączenie w obowiązkową naukę szkolną konfrontowane z wiedzą formalną wykorzystującą symbole, pojęcia abstrakcyjne i reguły postępowania. Zderzenie tych dwóch światów jest niezwykle trudne dla dziecka. Dotychczasowe przyswajanie nieformalnej matematyki odbywające się w zgodzie z naturalnymi zainteresowaniami poprzez filtrowanie i interpretację tych informacji, które były akceptowane w dziecięcych kategoriach wiedzy, zostaje uzupełnione lub przebudowane, burząc dotychczasowe dziecięce rozumienie. Nowe, nieznane informacje, podawane jako cudze i do tego niezrozumiałe, często wywołują nie tyle brak zainteresowania, co wzbudzają niechęć. Dlatego za oczywisty przyjmuję fakt, że w szkole w celu zniwelowania trudności w uczeniu się matematyki rozpoczynamy od nieformalnej wiedzy matematycznej dziecka wiążącej się z jego dotychczasowymi doświadczeniami i należytej dbałości o podtrzymanie zainteresowania. Pamiętajmy, że dzieci reagują tak, jak dorośli. Jeśli są czymś zainteresowane, to chętnie się angażują. Przejście w trybie szkolnym od wiedzy nieformalnej do formalnej utrudnia tzw. tradycyjne podejście do nauczania matematyki, które nie odpowiada myśleniu dziecka. Cechuje je podejście nakazujące do uczenia się, a jak wiemy, przekorna natura nie lubi nakazów. Tradycyjne nauczanie matematyki oparte na ustnych wyjaśnieniach zilustrowanych przykładami prowadzi dzieci drogą naśladowania czynności nauczyciela i ćwiczenia procedur do momentu, aż staną się automatyczne. Prowadzone w jednolity sposób i na wysokim poziomie abstrakcji lekcje wywołują znużenie oraz wzmacniają przekonanie, że matematykę należy opanować na pamięć. Idąc dalej tą drogą i zakładając, że nasi uczniowie jednak opanują przedłożone im treści matematyczne pamięciowo, widzimy kolejną trudność dotyczącą celu, dla którego podejmujemy trud uczenia się tego przedmiotu. Uczymy się matematyki po to, aby skutecznie ją wykorzystać w sytuacjach nowych, nie tylko tych znanych nam z lekcji, zatem ograniczanie się do pamięciowego opanowania zagadnień matematycznych nie sprzyja rozwijaniu umiejętności posługiwania się matematyką, a co więcej – opanowywanie pamięciowe osłabia zdolności samoregulacji niezbędne do dostrzegania i rozwiązywania problemów (Holt, 1964).

Konstruktywistyczne podejście do edukacji wymaga stałej i aktywnej manipulacji znaczeniami terminów matematycznych, a nie tylko sprawnego rachowania i operowania wzorami. Uznając, że matematyka nie ma charakteru kumulatywnego, a jej zgłębianie to ciągłe poszukiwanie sensu i inteligentne wykorzystywanie umiejętności matematycznych, należy zmienić nasze tradycyjne widzenie lekcji matematyki. Kształcenie matematyczne w podejściu konstruktywistycznym na każdym etapie kształcenia zakłada, że należy kształtować pojęcia matematyczne, umiejętność algorytmizacji, zgłębiać procesy heurystyczne, kształtować umiejętność współpracy przy rozwiązywaniu problemów oraz refleksję w działaniu i nad zrealizowanym zadaniem. Wszystkie te kompetencje są niezbędne w życiu dorosłym, a pamiętając, że nie kształtujemy ich w starannie wyselekcjonowanym odcinku czasu, powinniśmy zabiegać o doskonalenie ich przez cały czas. Konstruktywizm nie oferuje pedagogicznych recept, jednak stawia w centrum głęboką troskę o ucznia, która staje się najmocniejszym jego przesłaniem. Głosi pogląd, że nie o „wydajność” ucznia szacowaną testami zewnętrznymi należy zabiegać, lecz o stały kontakt ze sposobem jego myślenia i rozwiązywania problemu. Ten stały kontakt umożliwia wsparcie ucznia i wyposażanie go w narzędzie obejmujące rozumne korzystanie z pojęć matematycznych, potężne metafory i heurystyczne procedury oparte na rozumieniu, by mógł coraz lepiej zgłębiać siebie, tj. własne metody uczenia się i własne myślenie. Wśród doświadczeń, które szkoła musi zapewnić uczniom, Rorbert B. Davis, Carolyn A. Maher i Nel Noddings wymieniają:

- a) sytuacje spotykane dotychczas („pokaż, powiedz i powtarzaj”), ale nie w postaci gotowej wiedzy, tj. w postaci formuły, wzoru i definicji; należy rozpoczynać od badania chaotycznej rzeczywistości i dostrzegania w niej pewnych zależności, które staną się szkieletem konstrukcji abstrakcyjnych pojęć matematycznych oraz dbać o to, aby dzieci widziały oba stany – ten chaotyczny i elegancję abstrakcji – oraz przejścia od jednego do drugiego;
- b) staranne projektowanie sytuacji dydaktycznych, które pozwolą na poprawne odzwierciedlenie właściwości struktur matematyki i które dadzą uczniom podstawę do wzmacniania umysłowych reprezentacji;
- c) ogólne doświadczenia, które opisujemy jako doświadczenia „budujące gotowość”;
- d) projektowanie doświadczeń, których realizacja daje możliwość nawiązania bezpośredniego kontaktu ze sposobami myślenia uczniów o jakimś problemie lub zadaniu (Davis, Maher, Noddings, 1990, s. 189).

Podsumowując rozważania o konstruktywistycznym podejściu do nauczania matematyki, warto pamiętać, że z konstruktywistycznego punktu widzenia

postrzeganie jest zawsze raczej aktywnym tworzeniem niż biernym odbieraniem (von Glasersfeld, 1987). Na uczniowską działalność na lekcjach matematyki należy patrzeć jak na dziecięcą twórczość, zaś odkrywanie nowych matematycznych tajemnic uczynić podstawą aktywności poznawczej dziecka.

2. Odkrywanie matematyki drogą zdobywania wiedzy

Wiedzę matematyczną możemy zdobywać poprzez samodzielną aktywność lub poprzez przyjmowanie uzewnętrznionej wiedzy innego człowieka. Jednak w tym drugim wypadku stajemy przed sytuacją, w której z góry przyjmujemy, że przedstawiony sposób działania matematycznego jest właściwy, jedyny i wystarczający. Nabywając kompetencje matematyczne, a jest to proces długotrwały, możemy przyjąć postawę wiernego odtwarzania wiedzy w sytuacjach nam znanych lub wziąć odpowiedzialność za własne uczenie się i konstruować wiedzę matematyczną samodzielnie – tak, aby z powodzeniem wykorzystywać ją do rozwiązywania zadań nietypowych i pozaszkolnych. Która z tych dróg daje trwalsze rezultaty i pełniejsze rozumienie w zakresie matematyki? Odpowiedź nie jest trudna. Wystarczy wyobrazić sobie sytuację, w której musimy zapamiętać drogę z miejsca A do miejsca B. Lepsze efekty uzyskamy, jeśli pokonamy ją samodzielnie niż wtedy, gdy ktoś szczegółowo opisze nam, jak mamy iść. Tak też jest w przypadku matematycznego poznania. Podążanie drogą matematycznego poznania jest wartościowszym sposobem uczenia się matematyki, czego będę starała się dowieść w tym rozdziale.

Podążanie drogą matematycznego poznania rozumiane jest tu jako uczenie się w akcie dokonywania odkryć. Przyjmijmy za Brunerem, że odkrywanie nie odnosi się tylko do czegoś, co wcześniej nie było znane ludzkości. Odkrywaniem na drodze poznania matematycznego będziemy określali samodzielne zdobywanie wiedzy nie o tym, czego nikt jeszcze nie wie, ale o tym, czego nie wie uczący się. Odkrywanie będące jednym ze sposobów uczenia się jest aktem indywidualnym, któremu towarzyszy zdziwienie pojawiające się zawsze w kontekście dotychczas zdobytej wiedzy (Bruner, 1978, s. 662 i dalsze). Według Brunera akt

odkrywania „polega w swej istocie na przeorganizowaniu bądź przekształceniu danych w sposób pozwalający na wyjście poza tak przegrupowane dane oraz na uzyskanie dalszego, nowego wyglądu” (Bruner, 1978, s. 663). Zdarza się, że owo odkrycie jest możliwe dzięki pozyskaniu nowych informacji, ale może powstać także na bazie dotychczasowych, w wyniku innego niż aktualne postrzeganie danych, wsparte ich reorganizacją.

Najważniejszym sprzymierzeńcem aktu odkrycia jest zaangażowanie i wiara, że uda się go dokonać. Wierząc, że możemy dokonać odkrycia, zaczynamy poszukiwać i opracowywać sposoby postępowania, które pomogą osiągnąć cel. Odkrywanie wiedzy znacząco różni się od przyjmowania uporządkowanych i zaplanowanych do przekazania porcji materiału z danego zakresu. Jego główną zaletą jest uwolnienie dziecięcego uczenia się od sztywnych reguł postępowania oraz wyzwolenie jego aktywności własnej, co skutkuje ograniczaniem dążeń do mechanicznego uczenia się. Pojawiająca się podczas odkrywania szerokokontekstowa analiza sytuacji kształtuje umiejętność radzenia sobie z różnymi zadaniami, a szczególnie z tymi, przy których przechowywane w pamięci schematy postępowania zawodzą. Ponadto pojawia się możliwość kształtowania kompetencji, a nie wąskich umiejętności sprawdzających się w sytuacjach typowych. Uczenie się dziecka poprzez odkrywanie możemy uznać za przebiegające od wewnątrz na zewnątrz, bo podejmując się próby rozwiązania postawionej przed nim sytuacji zadaniowej, wykorzystuje wszystkie dotychczas ukształtowane struktury umysłowe i za ich pomocą podejmuje decyzje co do przyjmowanych rozwiązań. Natomiast w tradycyjnym podejściu do nauczania najczęściej spotykamy się z sytuacją, w której nauczyciel jest źródłem wszelkiego poznania i przekazuje nam wiedzę w sposób, który jemu wydaje się najwłaściwszy (w tym wypadku mamy do czynienia z uczeniem się od zewnątrz do wewnątrz). Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną znaną cechę uczenia się poprzez odkrywanie – dziecko ma okazję wyjść poza dostarczone informacje i wskazówki, stając się twórczym poszukiwaczem rozwiązań.

Ważną cechą jest wzrost atrakcyjności zajęć szkolnych, który przekłada się na wzrost dziecięcego angażowania się w to, co dzieje się na lekcji. Uczeń z tkwiącego w ławce biernego słuchacza ma szansę stać się narratorem zajęć, biorąc czynny udział w dyskusjach o planowanych rozwiązaniach czy w organizowaniu przestrzeni ułatwiającej rozwiązanie. Jednak przede wszystkim używa poczucia, że jest ważny i jego zdanie ma znaczenie. Aktywne działanie towarzyszące uczeniu się poprzez odkrywanie pozwala osiągnąć satysfakcję. Jest

to o tyle ważne, że wzmacnia poczucie własnej skuteczności oraz determinuje działania skoncentrowane na osiągnięciu celu. Wzrasta dziecięca świadomość własnych możliwości, konieczności właściwej organizacji informacji, planowania rozwiązania i weryfikacji uzyskanych rezultatów. Kształtująca się zdolność do przekształcania i weryfikowania informacji wspiera umiejętność przyjmowania różnych rozwiązań, często obejmujących skrajnie różne podejścia do sytuacji zadaniowej. Ważną kwestią z punktu widzenia trwałości wiedzy jest pamięć. Bruner twierdzi, że odkrywanie pozostawia trwały ślad w pamięci i ułatwia dostęp do przechowywanych tam informacji. Uzasadniając swoje stanowisko, podaje, że odkrywaniu towarzyszą silne emocje wzmacniające zapamiętywanie, a częsta reorganizacja dotychczas zdobytej wiedzy powoduje, że staje się ona materiałem zawsze aktualnym i aktywnym, a nie zapamiętanym i głęboko przechowywanym (Bruner, 1978, s. 679). Ponadto pozostaje kwestia pokonania drogi odkrycia raz jeszcze. Przekazując dzieciom informację w postaci gotowych stwierdzeń, oprócz wymuszania na nich przyjęcia informacji zawartych w nowych treściach matematycznych jako własnych, wskazujemy tylko jedną drogę ponownego ich przywołania. Podczas zdobywania wiedzy na drodze odkrywania dziecko ma możliwość przywołania kolejno wykonanych czynności, zdarzeń czy prowadzonych rozmów, w wyniku których uzyskało nową wiedzę. Przykładem potwierdzającym odwołanie się do pokonanej drogi poznania są stanowiska uczniów, którzy nie zapamiętują wzorów matematycznych. Uzasadniają niechęć pamięciowego ich opanowania możliwością ich wyprowadzenia.

2.1. Odkrywanie a rozwijanie myślenia matematycznego

Tytuł podrozdziału przyjmuje *a priori*, że myślenie można rozwijać. Tak faktycznie jest, dowodzi tego chociażby Piaget w swoich pracach nad rozwojem poznawczym dziecka, opisując, jak z wiekiem zmienia się nasza zdolność do postrzegania i interpretowania informacji płynących z otoczenia, w którym funkcjonujemy. Dlatego warto zastanowić się, czy dziecięce odkrywanie matematyki nie tylko wspiera rozwój myślenia, ale stanowi jeden z najskuteczniejszych sposobów uczenia się, o którym warto pamiętać, gdy projektujemy sytuacje dydaktyczne dla naszych uczniów. O myśleniu, a dokładniej myśleniu logicznym (czy też matematycznym, bo często w dyskusjach na poziomie praktycznym pojęcia te wykorzystuje się jako synonimy)

mówi się, że jest jednym z najistotniejszych celów nauczania matematycznego. Czy naprawdę jest ten tak silnie eksponowany na każdym etapie kształcenia cel edukacji matematycznej? Myślę, że na początku warto sprecyzować, co rozumiemy przez pojęcie myślenie. W tym celu sięgniemy do psychologii i jej stanowiska w tej kwestii.

Myślenie w literaturze definiowane jest jako złożona czynność umysłowa, której dokonujemy na informacjach zgromadzonych w wyniku poznania zmysłowego, a także zakodowanych w wyobrażeniach lub pojęciach. Jemu przypisujemy zdolność poznawania otaczającej rzeczywistości m.in. poprzez dostrzeganie stosunków i zależności w niej funkcjonujących, zdolność do planowania, projektowania i realizacji działań, dokonywania odkryć czy formułowania opinii i wniosków. To właśnie myślenie pozwala człowiekowi na przewidywanie następstw podejmowanych działań oraz buduje przestrzeń, w której zyskujemy warunki do własnego rozwoju i zaspokajania potrzeb w tym zakresie. Myślenie posługujące się ideami, obrazami, pojęciami, spostrzeżeniami, symbolami czy sądami wspiera naszą wyobraźnię i rozwija twórczość, implikuje poszukiwania oraz formułowanie nowych pojęć i teorii, umożliwia rozwiązywanie problemów, a także decyduje o naszych możliwościach poznawczych (Kozielecki, 1992; Maruszewski 2001; Szewczuk, 1985; Zimbardo, 1999). Oprócz materiału myślenia, czyli ukształtowanych i przechowywanych struktur informacji, J. Kozielecki wskazuje na dwa, istotne w aspekcie organizacji środowiska uczenia się, komponenty procesu myślenia, tj. operacje umysłowe i reguły. Mianem operacji umysłowych określa elementarne transformacje na materiale myślenia, natomiast reguły opisuje jako strategie umożliwiające porządkowanie operacji umysłowych (Kozielecki, 1992, s. 92).

Docelowo w matematyce materiałem myślenia są pojęcia abstrakcyjne, które stanowią powiązane ze sobą reprezentacje faktów matematycznych. Możemy przypisać im miano pojęć matrycowych, czyli „poznawczych reprezentacji skończonej liczby wspólnych cech, które w jednakowym stopniu przysługują wszystkim desygnatom (egzemplarzom) danej klasy” (Kozielecki, 1992, s. 99). Warto dodać, że oprócz tych dominujących w matematyce Kozielecki wyróżnia również pojęcia naturalne, „które w różnym stopniu przysługują desygnatom (egzemplarzom) danej klasy” (Kozielecki, 1992, s. 102). Mimo że pojęcia naturalne dominują w codziennym życiu człowieka, cechuje je mniejsza jednoznaczność. W przypadku tych pojęć desygnaty grupują się wokół najbardziej reprezentatywnego egzemplarza (Zimbardo, 1999).

Prawidłowy przebieg myślenia i trafność uzyskanych efektów są uwarunkowane właściwym doбором pojęć (Kozielecki, 1992), dlatego też proces ich kształtowania otrzymuje tak wielką rangę w nauczaniu i uczeniu się matematyki. Jednak ich rozumienie nie jest możliwe bez dostrzegania zależności występujących między nimi, a te z kolei występują dzięki operacjom myślowym.

2.1.1. Odkrywanie a operacje myślowe

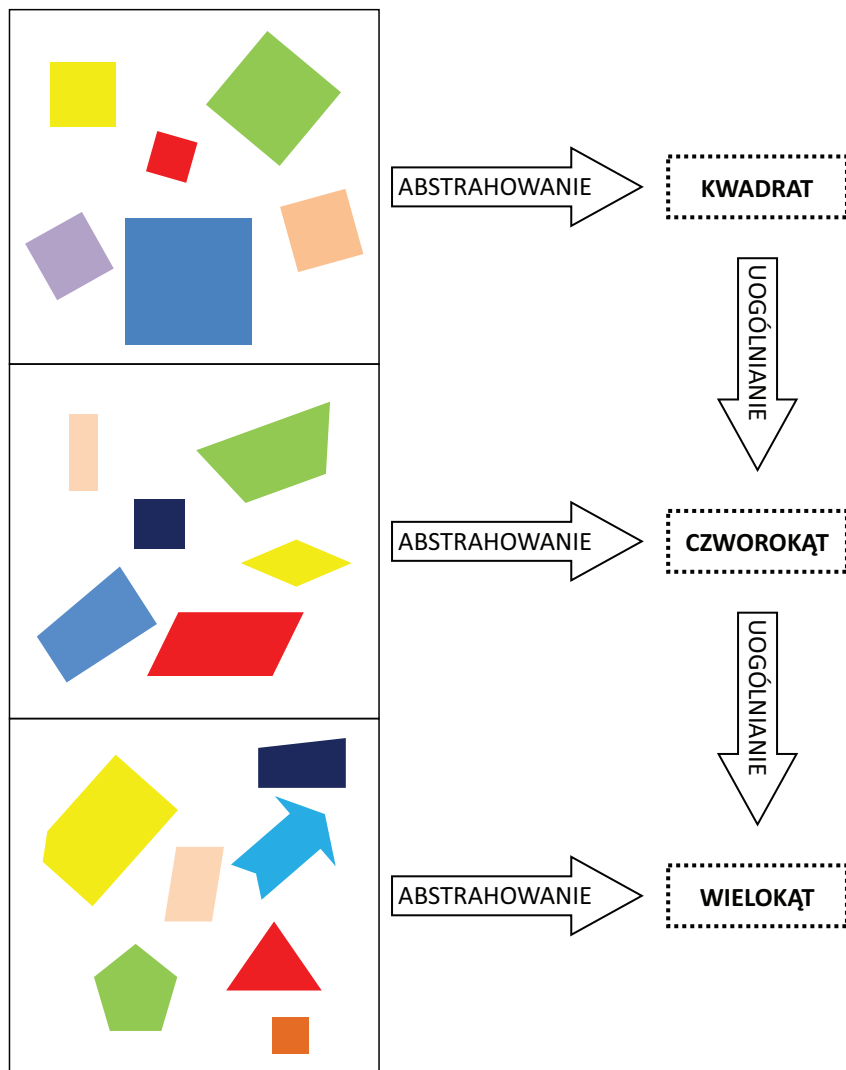
Wśród operacji myślowych wyróżnia się dwie podstawowe, czyli analizę i syntezę, oraz ich pochodne, tj. abstrahowanie, uogólnianie i porównywanie (Kozielecki, 1992, s. 96). Analiza i synteza to procesy myślowe, które przebiegają bardzo szybko i wielokrotnie w naszych umysłach, występują przemienne, a wszystko to w celu wybrania przez nasz umysł poszukiwanych informacji. Analiza jest procesem polegającym na wyodrębnieniu z całości pewnych cech przy jednoczesnym zachowaniu relacji między składowymi rozważanego obiektu myślowego, natomiast synteza polega na łączeniu elementów, cech, części w całość z uwzględnieniem dostrzeżonych relacji. Tak jak analizę stosujemy w celu wykrycia struktury badanego obiektu czy mechanizmów działających w jego obrębie, tak synteza umożliwia całościowy ogląd rozważanego obiektu myślowego. Stosując na przykład analizę podczas rozwiązywania zadań matematycznych, wyodrębniamy zmienne dane i szukane, a także zależności występujące między nimi, podczas gdy synteza umożliwia w drodze matematyzacji całościowe ujęcie wyodrębnionych elementów w model matematyczny. Synteza za pomocą takich operacji myślowych, jak abstrahowanie, uogólnianie i porównywanie zmierza do wykrycia w połączonej, nowej całości istotnych własności i ich przyporządkowań. Takie postrzeganie analizy i syntezy przesądza, że stanowią one wzajemnie przeplatające i dopełniające się procesy myślowe.

Abstrahowanie to jedna z istotniejszych operacji myślowych wykorzystywana przez uczniów w młodszych klasach do określania pojęć, reguł i zależności w świecie matematyki. Zbigniew Semadeni abstrahowanie, a dokładniej abstrahowanie generalizujące, nazywa „operacją myślową prowadzącą do pojęcia ogólnego przez uwzględnienie tylko niektórych cech rozpatrywanych przedmiotów lub zjawisk i wyodrębnienia tych cech w myśli z jednoczesnym pominięciem innych cech nieistotnych z danego punktu widzenia” (Semadeni, 1981, s. 54). Abstrahowaniu często towarzyszy idealizowanie, czyli zastępowanie w myśli cech dostrzeżonych własnościami idealnymi, np. podczas badania kształtów występujących w najbliższym otoczeniu dziecka i szuka-

nia ich matematycznych odpowiedników – tak jak wtedy, gdy obserwujemy budynki mieszkalne, które dziecko spotyka w drodze do szkoły czy podczas szkolnych wycieczek. Wszyscy wiemy, że budynki są trójwymiarowe, a jednak mówimy o oknach w kształcenie prostokąta czy o ścianach budynków w kształcie kwadratu.

Drugą istotną operacją myślową jest uogólnianie, którą w sensie matematycznym będziemy określać jako czynność umysłową, w wyniku której dla pewnego pojęcia abstrakcyjnego wskazujemy pojęcie ogólniejsze, a rozważane pojęcie abstrakcyjne traktujemy jako jego szczególny przypadek. I tak pojęciem ogólniejszym dla kwadratu jest równoległobok, a dla niego czworokąt. Uogólnianie pojęć pozwala tworzyć szersze klasy i ułatwia porządkowanie wiedzy matematycznej.

Zarówno abstrahowanie, jak i uogólnianie są możliwe dzięki umiejętności porównywania. To kolejna operacja umysłowa, która polega na poszukiwaniu i wskazywaniu podobieństw i różnic w badanych obiektach. To na jej podstawie wnioskujemy o cechach wspólnych istotnie wyróżniających obiekt spośród innych, a także przypisujemy go do klasy obiektów ogólniejszych, traktując go jako przynależny. Na schemacie 1 zaprezentowano, jakie relacje zachodzą między tymi procesami myślowymi. Uczniowie, badając zbiór kwadratów o różnej długości boków i w różnych kolorach, mają dostrzec, że mimo tych różnic każda z tych figur ma ten sam kształt, w którym cztery występujące boki są tej samej długości, a kąty proste. Podobnie badają czworokąty wypukłe i wielokąty. To właśnie proces abstrahowania pozwala im na pominięcie kolorów i wielkości obiektów geometrycznych, a wybranie tylko tych cech, które opisują je wszystkie. Proces uogólnienia (schemat 1) będzie polegał na dostrzeżeniu, że każdy kwadrat posiada wszystkie cechy czworokąta, ale nie każdy będzie kwadratem. Takie uczniowskie spostrzeżenia pozwolą na sformułowanie wniosku, że czworokąt wypukły jest pojęciem nadrzędnym w stosunku do kwadratu i tworzy ogólniejszą klasę obiektów. Warto przy tym dodać, że proces uogólniania jest dla dzieci trudniejszy od abstrahowania, bo łatwiej wyłonić w danej grupie obiektów wspólne cechy, niż przypisać je do zbioru obiektów o cechach ogólniejszych.

Schemat 1: Abstrahowanie i uogólnianie pojęć

Źródło: opracowanie własne.

Należy wspomnieć jeszcze o dwóch ważnych w kontekście matematyki operacjach myślowych, a mianowicie o konkretyzacji i uszczegóławianiu. Konkretyzacja jest operacją odwrotną do abstrahowania (Semadeni, 1981, s. 55). Spotykamy się z nią w sytuacji, gdy dziecko ma za zadanie wskazać konkretny obiekt jako przykład ukształtowanego pojęcia abstrakcyjnego, np. znając pojęcie ob-

wódu wielokąta, potrafi obliczyć obwód prostokąta o bokach 4 cm i 5 cm. Zresztą zawsze, gdy uczeń podaje przykład konkretnego obiektu matematycznego, aby zilustrować dane pojęcie, mówimy o konkretyzacji. Konkretyzacja jest na tyle ważna, że umożliwia uczniom pokonywanie trudności napotkanych podczas rozwiązywania zadań, np. służy do wizualizacji sytuacji przedstawionej w zadaniu. Można to zilustrować chociażby w takim przykładzie:

Zadanie: Jak zmieni się suma dwóch dowolnych liczb, gdy jedną z nich zwiększymy o jeden? (lub w wersji profesjonalnej: Jak zmieni się suma dwóch liczb naturalnych, gdy jeden ze składników zwiększymy o jeden?)³.

Zaprezentowane w takiej postaci zadanie jest dla uczniów trudne, dlatego warto skorzystać z konkretyzacji, która sprawdza się tu bardzo dobrze. Traktując ją jako czynność pomocniczą na drodze poszukiwania rozwiązania, wystarczy poprosić ucznia, aby sprawdził, jak zachowują się dwie dowolnie wybrane przez niego liczby w sytuacji opisanej w zadaniu. Oczywiście jeden konkretny przykład nie doprowadzi dziecka do rozwiązania, ale wskaże drogę, którą powinien podążać, aby uzyskać rozwiązanie. Konkretyzacja jest niezmiernie pomocna w sytuacjach, gdy dziecko po przeczytaniu zadania nie wie, co zrobić. Inną zaletą tej operacji myślowej jest możliwość weryfikacji przyjętego rozwiązania. Weźmy dla przykładu następującą hipotezę: Każdy trójkąt ma równe boki. Aby ją obalić, wystarczy narysować tylko jeden trójkąt o bokach różnej długości. Okazuje się wtedy, że istnieją trójkąty o różnych długościach boków. W matematyce taki przykład ukazujący nieprawdziwość danego spostrzeżenia nazywamy kontrprzykładem. Myślę, że już we wczesnej edukacji warto uczyć dzieci posługiwania się tym narzędziem.

Uszczegóławianie pojawia się w sytuacji, gdy przechodząc od pojęcia ogólniejszego, dochodzimy do bardziej szczegółowego, jak chociażby wspomniany wcześniej obwód prostokąta, w którym wyznaczenie jego wartości polega na zsumowaniu podwojonej długości oraz podwojonej szerokości prostokąta. Natomiast w przypadku dowolnego wielokąta obwodem określamy wielkość uzyskaną w wyniku zsumowania długości wszystkich jego boków. Uszczegółowienie jest operacją myślową odwrotną do uogólniania (Semadeni, 1981, s. 54).

³ Bardzo wiele przykładów interesujących i wartościowych zadań w kontekście kształcenia matematycznego odnajdziemy w: Kalinowska (2010a) oraz Klus-Stańska, Kalinowska (2004).

Wszystkich wymienionych powyżej operacji myślowych bez wątpienia doszukamy się w czynnościach umysłowych uczniów, gdy prowadzą oni własne badania, w wyniku których dokonują odkrycia matematycznego. Chociażby wówczas, gdy postawimy przed nimi figury przestrzenne i poprosimy, aby uważnie przyjrzeni się obiektom, po czym pogrupowali je według dostrzeżonych podobieństw i różnic. Jest to bardzo ciekawe doświadczenie, podczas którego dzieci dostrzegają i wskazują elementy obiektów (analiza), porównują wyodrębnione składowe obiektów, dyskutują o swoich spostrzeżeniach, krytycznie oceniają pojawiające się pomysły, budują zbiory brył, np. o dwóch podstawach lub o ścianach bocznych będących trójkątami (abstrahowanie i uogólnianie), aż w końcu badane obiekty ujmują całościowo z uwzględnieniem wskazanych uprzednio elementów i występujących między nimi relacji (synteza).

2.1.2. Odkrywanie a reguły myślenia

Reguły, czyli ostatni z wyróżnionych elementów myślenia, są sposobami, w jaki nasz umysł porządkuje operacje umysłowe. To one odpowiadają za sposób komponowania operacji myślowych w całość i zawsze są podporządkowane realizacji celu, który je wywołał. Najogólniejszy podział reguł myślenia wyodrębnia algorytmiczne i heurystyczne (Zimbardo, 1999, s. 417–418). Algorytmem w kontekście nauczania matematyki będziemy nazywali oparty na z góry przyjętym zbiorze czynności podstawowych skończony ciąg czynności, którego rzetelna realizacja zawsze prowadzi do rozwiązania zadania. Wśród warunków dobrze określonego algorytmu wyróżniono ogólność, jednoznaczność czynności i efektywność (Krygowska, 1979, s. 115). Ogólność przejawia się w możliwości zastosowania ciągu zaplanowanych czynności do rozwiązania danego typu zadań. Jednoznaczność gwarantuje nam, że opanowanie czynności podstawowych i przestrzeganie ich sekwencyjności doprowadzi nas do rozwiązania, co więcej – pozwoli automatycznie uzyskać rozwiązanie. Natomiast efektywność algorytmu przejawia się w uzyskaniu poprawnego rezultatu w skończonej liczbie kroków. Z. Krygowska podkreśla, że znajomość algorytmów i poprawność stosowania usprawnia nas w zakresie rachowania i pozostawia miejsce dla twórczości matematycznej dziecka (Krygowska, 1979, s. 115 i dalsze). Zgadzam się, że wykorzystywanie algorytmów jest jednym z warunków koniecznych działalności matematycznej dziecka, ale nie jedynym. Stanowisko Krygowskiej w tej sprawie wyraźnie wskazuje, że algorytmy powinny występować na lekcjach matematyki, jednak ograniczanie się w pracy

dydaktycznej tylko do nich stanowi podstawowy błąd nauczyciela (Krygowska, 1979, s. 124). Na ten fakt zwróciła uwagę również D. Klus-Stańska, która podkreśliła, że „poznawanie algorytmicznych schematów w szkole wiąże się z poleceniami, które możemy określić jako »Zapamiętaj i ćwicz«, a ich wykorzystanie w dalszej pracy z sytuacjami »Rozpoznaj i działaj«” (Klus-Stańska, Nowicka, 2013, s. 166). Koncentracja w nauczaniu wyłącznie na algorytmach ujmuje zatem nauczanie matematyki jako mechaniczny proces, w którym aktywność uczniów ograniczana jest do opanowania schematów postępowania. Uważam również, że algorytmy w procesie kształcenia powinny znaleźć swoje miejsce, jednak konieczne w aspekcie rozwoju dziecka jest zwrócenie uwagi na odkrywanie algorytmów w trakcie uczenia się matematyki. Czym zatem będzie odkrywanie algorytmów?

Dwa podejścia do wykorzystywania w procesie kształcenia algorytmów mówią, że możemy posługiwać się tymi zaprezentowanymi przez nauczyciela i utrwalonymi w toku ćwiczeń, ale możemy skierować uczniowskie wysiłki na budowanie algorytmów, pogłębiając w taki sposób rozumne posługiwanie się nimi. Algorytmizacja, czyli jedna z reguł myślenia, wyznacza konsensus w sprawie: algorytmy TAK czy NIE. Ściśle wiąże się nie z samą znajomością algorytmu i umiejętnością posługiwania się nim, ale jest procesem polegającym na jego projektowaniu, sprawdzaniu stosowności i poszukiwaniu – jak określa się w matematyce potocznie – jego eleganckiej postaci. Odkrywanie algorytmu zatem to ciąg czynności umysłowych niedający się ująć w przyjęty na wstępie plan gwarantujący wyznaczenie poszukiwanego sposobu rozwiązania zadania. Uzyskany na drodze odkrywania ciąg czynności składowych algorytmu wykorzystuje tak znamienne dla rozwoju kompetencji matematycznych dziecka umiejętności, jak racjonalne posługiwanie się poznanymi w toku kształcenia algorytmami, rozpoznawanie, analizowanie i wskazywanie warunków działania algorytmów, budowanie algorytmów analogicznych do poznanych wcześniej, samodzielne konstruowanie algorytmów, weryfikowanie poprawności algorytmów i uzupełnianie ich o brakujące elementy (Krygowska, 1977a; Rams, 1982; Sysło, 2002). Algorytmizacja postrzegana jest jako jedna z ważniejszych aktywności matematycznych uczniów. To tworzenie algorytmów Zenon Moszner zalicza do najwyższego poziomu aktywności matematycznych (Moszner, 2004, s. 257–259), a Krygowska podkreśla, że to właśnie operatywny charakter matematyki umożliwia wprowadzenie uczniów w procedury algorytmizacji (Krygowska, 1986, s. 115).

Przyjrzyjmy się poniższemu przykładowi, w którym dzieci mogą powołać do życia własny algorytm. Rozważmy następujące przykłady zadań tekstowych dotyczących porównania różnicowego wielkości:

Zadanie: Na dwóch półkach ustawiono 26 książek w taki sposób, że na półce drugiej postawiono o 2 książki więcej niż na pierwszej. Ile książek ustawiono na każdej z półek?

Zadanie: Uczniowie klasy trzeciej wraz z wychowawcą wybrali się na pieszą wycieczkę. Po przejściu pierwszego odcinka wyznaczonej trasy zatrzymali się, aby odpocząć. Po zregenerowaniu sił ruszyli w dalszą drogę. Bez kolejnego przystanku dotarli na miejsce, pokonując łącznie 5 kilometrów. Wiedząc, że drugi odcinek trasy był o 1 kilometr dłuższy, wyznacz długość każdej z części przebytej drogi.

W każdym z tych przykładów, aby obliczyć mniejszą wielkość (liczba książek na pierwszej półce czy długość pierwszego odcinka trasy), wystarczy od łącznej wartości odjąć występującą między nimi różnicę, a uzyskany wynik podzielić przez 2. Uczniowie, pracując nad odkryciem sposobu rozwiązania tego typu zadań, mogą opracować algorytm postępowania pozwalający na uzyskanie poprawnej odpowiedzi. Algorytm ten może mieć następującą postać:

1. Określ, jaka jest łączna liczba książek (długość trasy).
2. Sprawdź, czy na każdej półce ustawiono po tyle samo książek (czy oba odcinki trasy były tej samej długości).
3. Od łącznej wielkości odejmij różnicę między liczbą książek na półkach (między długością trasy na kolejnych odcinkach).
4. Uzyskaną wielkość podziel przez dwa, aby uzyskać liczbę książek na pierwszej półce (długość pierwszego odcinka trasy).
5. Do liczby książek na pierwszej półce dodaj usuniętą wcześniej różnicę (do długości pierwszej trasy dodaj usuniętą wcześniej różnicę), aby uzyskać drugą poszukiwaną wielkość.
6. Sprawdź, czy uzyskane wyniki spełniają warunki zadania.

Ciekawym przedłużeniem pracy może być sprowokowanie sytuacji, w której ten algorytm, mimo rozpoznawalnej konstrukcji zadania, zawodzi. Dyskusja, która rodzi się wokół takiego konfliktu poznawczego, ma niezwykłą wartość edu-

kacyjną, a wielość uczniowskich wątpliwości staje się początkiem wartościowej dyskusji o matematyce.

Zadanie: Na dwóch półkach ustawiono 13 książek w taki sposób, że na półce drugiej postawiono o 2 książki więcej niż na pierwszej. Ile książek ustawiono na każdej z półek?

Jest to przykład zadania niestandardowego i po skorzystaniu z wcześniej wypracowanego algorytmu uzyskujemy zadziwiającą odpowiedź, tj. na pierwszej ustawiono pięć i pół książki, na drugiej siedem i pół. Przy obowiązku dbałości o książki (bez podziału żadnej z nich na połowy) nigdy nie ustawimy książek tak, jak opisano w zadaniu. Oczywiście można tę sytuację przedłużyć, np. pytając o opisaną w zadaniu możliwość rozmieszczenia książek. Ważnym aspektem pracy uczniów będzie nie tyle odkrycie algorytmu dla jednego, obłożonego warunkami typu zadań, ale poszukiwanie, porównywanie, sprawdzanie rezultatów i dyskusja o nich w kontekście warunków zadania czy wreszcie pisemna forma prezentacji rozwiązania. Ta ostatnia umiejętność niestety sprawia uczniom coraz więcej trudności. Przyczyną takiego stanu może być dążenie podczas lekcji do rozwiązania dużej liczby zadań wsparte kartami pracy i zeszytami ćwiczeń, kiedy często rozwiązujący ogranicza się do uzupełniania tzw. luk.

Odkrywanie algorytmów i posługiwanie się gotowymi algorytmami stanowi zupełnie inną aktywność umysłową. Zarówno pierwsza, jak i druga umiejętność wpisują się w pożądane zasoby kompetencji matematycznych, jednak to umiejętność samodzielnego budowania algorytmów czyni nas skuteczniejszymi w rozwiązywaniu zadań, szczególnie problemowych. Korzystanie z wyuczonych, gotowych algorytmów ogranicza nasze możliwości do zadań i sytuacji zadaniowych, z którymi spotkaliśmy się w toku nauki. Ponadto ulotność ludzkiej pamięci nie gwarantuje nam sukcesów, bo często nie pamiętamy wypracowanego w żmudnych ćwiczeniach algorytmu. To właśnie doświadczanie odkrywania algorytmów czyni nas bardziej otwartymi, zdolnymi do tworzenia czegoś nowego, a przede wszystkim oddala od nas jedną z najczęstszych myśli pojawiających się, gdy wywołają nas na matematyce do tablicy: *Jak to było?!*

Odkrywanie algorytmów, implikujące uczniowskie poznawanie sposobów ich otrzymywania w warunkach szkolnych, powinno być poprzedzone poszukiwaniami heurystycznymi, które zapewniają uczniom rozwijanie myśle-

nia (Klus-Stańska, Nowicka, 2013, s. 172). I tak wyłania nam się druga grupa reguł porządkujących operacje myślowe, czyli heurystyczne. Są to oparte na doświadczeniu reguły postępowania, które w przypadku nieznamości skutecznego algorytmu pozwalają na uproszczenie i skrócenie drogi poszukiwania rozwiązania. W porównaniu z algorytmami mogą być zawodne i nie gwarantują uzyskania odpowiedzi.

Korzeni współczesnej heurystyki doszukamy się u Sokratesa (469–399 p.n.e.), Kartezjusza (1596–1650), Leibniza (1646–1716) czy Poincarégo (1854–1912). Jednak to George Polya (1887–1985) uznawany jest za twórcę współczesnej heurystyki (Góralski, 1989, s. 55–60). Jego stanowisko zdecydowanie określa heurystykę jako metodologię i pedagogikę rozwiązywania zadań (Góralski, 1989, 60), która ma skupiać się na zrozumieniu procesu rozwiązywania zadań i operacjach myślowych wykorzystywanych w tym procesie (Polya, 2009). Wykorzystując doświadczenia w rozwiązywaniu zadań i obserwację ludzi rozwiązujących zadania, powinniśmy poszukiwać sposobów traktowania wszystkich możliwych rodzajów zadań, tak by określić charakterystyczne ryzy niezależne ani od tematyki, ani rodzaju zadania. Heurystyka nieprecyzyjnie określona świetnie spisuje się w rozwiązywaniu problemów wymagających twórczego myślenia, gdy utarte drogi postępowania zawodzą. Jej przedmiotem „jest ogół działań przedsięwziętych przez człowieka twórczo rozwiązującego zadania praktyczne, zadania poznawcze lub zadania przekazu” (Góralski, 1989, s. 61). Natomiast jej cele wskazują na potrzebę konstruowania i uzasadniania działań twórczych człowieka, opisywanie działań obserwowanych podczas twórczego rozwiązywania zadań w formie procedur, wskazywanie wśród nich najbardziej typowych oraz ich analizę, prowadzącą do definiowania sprawozdawczego (Góralski, 1989).

Heurystyka, która przede wszystkim sprzyja odkryciu rozwiązania (Góralski, 1989, s. 63), w swej ogólności wyznacza pewne ramy postępowania. W całym procesie możemy wyodrębnić trzy podstawowe fazy, tj. obserwowanie, poszukiwanie (odgadywanie) rozwiązań oraz sprawdzanie i ocenę rozwiązania (Góralski, 1989, s. 80). Obserwowanie, podobnie jak przy wykorzystaniu reguł algorytmicznych, rozpoczyna się analizą zadania i wyróżnieniem składników zadania. Jednak w przypadku reguł heurystycznych nie następuje identyfikacja algorytmu pozwalającego rozwiązać zadanie, ale odniesienie treści zadania do dotychczas zgromadzonej wiedzy i znanych sposobów działania. Ważnym etapem tej fazy jest wyodrębnianie i gromadzenie

faktów wiążących się z zadaniem. Tam, gdzie w regułach algorytmicznych następuje uzyskanie całkowitego lub częściowego rozwiązania zadania, w regułach heurystycznych dominuje określanie planów rozwiązania i ich porównywanie wsparte powtarzającą się analizą pojawiających się przyczyn postępów i błędów. Analizowanie własnego postępowania, modyfikowanie go na podstawie uzyskanych rezultatów oraz uczenie się na rozwiązaniach jest tu obecne w szerokim zakresie. Natomiast w końcowej fazie zamiast sprawdzać poprawność algorytmu z warunkami zadania, tu uzyskujemy wynik, którego sprawdzanie w gruncie rzeczy sprowadza się do rozwiązania odrębnego zadania (Góralski, 1989). Wśród własności metod heurystycznych George'a Polya możemy wyróżnić:

- rozległy obszar zastosowań,
- budowanie przestrzeni dla uczniowskiej aktywności, w której mamy możliwość powiązania wiedzy wcześniejszej z nową oraz odwołania się do dotychczasowych doświadczeń dziecka,
- uczenie się w toku rozwiązywania zadań poprzez porównanie przyjętych wstępnie planów rozwiązania, ich wnikliwą analizę i wyciąganie na tej podstawie wniosków,
- wykorzystywanie rozumowania indukcyjnego i analogii, które są już dostępne dzieciom we wczesnej edukacji,
- wyraźne wskazanie i oddzielenie etapów poszukiwania rozwiązania i weryfikacji uzyskanych rezultatów,
- trudności w zakresie przewidywania efektywności zastosowań (Góralski, 1989, s. 85–86).

Brak uniwersalności, który cechuje reguły heurystyczne, kieruje naszą uwagę w poznawaniu matematyki nie na określenie ścisłych sposobów dla danych typów zadań, ale na kształtowanie postaw wspierających odwagę intelektualną uczniów. Zofia Krygowska również zwraca uwagę w szkolnej edukacji matematycznej na znaczenie modelowania postaw gotowych na wyzwania nie tylko w matematyce, ale również poza nią. Twierdzi, że ważne jest stwarzanie okazji do eksplorowania jej obszarów, bo uwalnia to od jednostronnego myślenia. Owa jednostronność może sprowadzać się do wykorzystywania jednej metody, jednego schematu rysunkowego czy wykonywania rachunków w jeden utarty mechaniczny sposób, a to ogranicza uczniowską przestrzeń i swobodę działania (Krygowska, 1977, s. 127 i dalsze). Z mechanicznym wykonywaniem rachunków spotykamy się często w praktyce szkolnej, np. w sytuacji, gdy uczeń

ma wykonać dodawanie kilku składników ustawionych w działaniu w dowolnym porządku, np.

$$\text{Oblicz: } 12 + 7 + 21 + 8 + 13 =$$

Niedostrzeżenie przez dziecko, że składniki parami dopełniają się do pełnych dziesiątek, znacznie utrudnia rachunki. W podręcznikach szkolnych często w takich zadaniach umieszcza się polecenie: „Oblicz sprytnie”, co ma wzbudzić chęć poszukiwania łatwiejszego sposobu wykonania działania.

Kolejną niezwykle istotną uczniowską postawą jest zachowanie równowagi w obszarze poszukiwań, którą Krygowska ściśle wiąże z intuicją matematyczną, podpowiadającą, kiedy poszukiwać innej drogi rozwiązania, porzucając tę przyjętą na początku. Jest to trudna, wymagająca cierpliwości umiejętność. Zbyt pospieszne opuszczenie przyjętego na początku planu poszukiwania rozwiązania może być złym wyborem. Z drugiej strony zbyt długie trwanie przy nim, mimo braku rezultatów, także okazuje się błędem. Świadome doświadczanie matematyki umożliwia zatem nabywanie wyczucia co do trwania bądź zmiany początkowo przyjętej strategii rozwiązania.

Ostatnią wśród wymienionych postaw jest rozwijanie świadomości, że nawet wielokrotne bierne czytanie i rozwiązywanie typowych przykładów jedną przyjętą metodą nie prowadzi do sukcesu matematycznego. Te trudne do uchwycenia warunki sukcesu powinny być wspierane stroną techniczną kształcenia, która, jak podkreśla Krygowska, pojawia się w trakcie pracy nad odkrywaniem rozwiązania. To wtedy uczniowie kształtują właściwy zapis przyjętego rozwiązania, dokonują wyboru oznaczeń i uczą się konsekwentnie ich przestrzegać, konstruują rysunki geometryczne, nabywają świadomość użyteczności numeracji wykorzystanych wzorów, reguł, praw i własności. Autorka jednoznacznie wskazuje, że to właśnie w toku poszukiwania rozwiązania uczeń ma szansę na osobiste „dorabianie się” pożądanym postaw matematycznych (Krygowska, 1977, s. 127 i dalsze). Postawy, o których mówi Krygowska, odpowiadają pierwszym trzem regułom postępowania (dyrektywom) Polyi, użytecznym podczas rozwiązywania zadań (tab. 1). W wyznaczonych regułach postępowania – oprócz użytecznych w uczeniu się matematyki postaw – Polya wskazuje ogólne zasady dokonywania wyborów podczas rozwiązywania zadań, podkreśla rangę rzeczowej zawartości zadania, a także wskazuje, jak wykorzystać dotychczas zgromadzoną wiedzę i doświadczenia.

Tabela 1. Reguły postępowania (dyrektywy) podczas rozwiązywania zadań według George’a Polya

Reguły postępowania (dyrektywy)	użyteczne postawy	racjonalność rozumiana jako niesprzeciwianie się wyczuciu i dostrzeganie argumentów potwierdzających lub negujących przyjęte plany rozwiązania zadania	
		oszczędność wyrażająca się nie w z góry narzuconych ograniczeniach, ale rozumiana jako trzymanie się zadania tak blisko, jak to tylko możliwe przy jednoczesnym zachowaniu gotowości do odejścia od przyjętego planu rozwiązania, jeśli będą tego wymagać okoliczności	
		wytrwałość jako niezbyt pośpieszne porzucanie początkowych założeń rozwiązania oraz różnorodność jako umiejętność zmiany planów bez upartego trwania przy początkowych założeniach	
	reguły preferencji	ogólne zasady wyboru	to co łatwiejsze ma zawsze pierwszeństwo przed tym, co trudniejsze
			to co lepiej znane ma pierwszeństwo przed tym, co jest gorzej znane
			obiekt, który posiada więcej punktów wspólnych z zadaniem, zawsze będzie miał pierwszeństwo przed tym, który tych punktów ma mniej
		zawartość rzeczowa zadania	całość ma pierwszeństwo przed częściami, główne części – przed pozostałymi częściami, bliższe części zadania – przed bardziej oddalonymi
		sposób użytkowania wiedzy i doświadczenia	zadania rozwiązane ostatnio i zawierające ten sam rodzaj niewiadomej mają pierwszeństwo przed zadaniami rozwiązanymi wcześniej
			udowodnione wcześniej twierdzenia, które zawierają ten sam wniosek co rozważane twierdzenie, mają pierwszeństwo przed innymi udowodnionymi wcześniej twierdzeniami
			zadania równoważne właśnie rozwiązywanemu mają pierwszeństwo przed zadaniami, które możemy sprowadzić do niego, lub obejmują je, a to z kolei ma pierwszeństwo przed wszystkimi pozostałymi zadaniami

Źródło: Polya, 1975, s. 281 i dalsze.

Heurystyka, mimo że stanowi bardzo ogólny i z założenia zawodny sposób rozwiązywania zadań w stosunku do wypracowanych algorytmów, jest nieocenionym narzędziem działalności matematycznej uczniów. Niepodważalność jej stosowania w praktyce edukacyjnej jest widoczna w chwili, gdy myślenie o kształceniu matematycznym zaczniemy postrzegać nie jako wyposażenie w gotowe modele i schematy postępowania, lecz gdy skierujemy nasz wysiłek na kształtowanie jednostki twórczej, rozwijającej się i dążącej do samodzielności intelektual-

nej. Klus-Stańska i Nowicka piszą: „Rozwiązywanie zadań za pomocą heurystyk wiąże się z uruchamianiem strategii twórczego myślenia, wraz z typową dla tego rodzaju aktywności poznawczej zdolnością do tworzenia hipotez oraz ich ciągłej weryfikacji, w poszukiwaniu nieznanego dotąd sposobu działania” (Klus-Stańska, Nowicka, 2013, s. 166) i potwierdzają, że wszystkie te aktywności umysłowe są już dostępne małym dzieciom (Klus-Stańska, Nowicka, 2013, s. 166).

W omawianym powyżej procesie myślenia odwoływałam się niejednokrotnie do obszaru matematyki, jednak nadal nie odniosłam się do relacji między pojęciami „myślenie” a „myślenie matematyczne” (logiczne). Na podstawie wcześniej zaproponowanej definicji nietrudno określić pojęcie „myślenie matematyczne”, bo skoro myślenie to proces umysłowy dokonywany na informacjach zgromadzonych w wyniku poznania zmysłowego lub zakodowanych w wyobrażeniach czy pojęciach, umożliwiający poznawanie i aktywne uczestnictwo w otaczającej nas rzeczywistości, to myślenie matematyczne będzie wykorzystywało informacje matematyczne w celu aktywnego poznawania i stosowania matematyki nie tylko w jej zakresie, ale także w życiu codziennym. D. Klus-Stańska i A. Kalinowska definiują myślenie matematyczne jako „zespół podejmowanych samodzielnie czynności umysłowych polegających na: (1) rozwiązywaniu zadań i innych problemów matematycznych, [...], (2) poszukiwaniu tych problemów, czyli dostrzeganiu nowych relacji matematycznych i skłonności do matematyzacji rzeczywistości” (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004, s. 19). Pozostawanie, ich zdaniem, w obszarze stosowalności tylko mechanicznie wypracowanych technik obliczeniowych prowadzi do działalności uczniów, którą można nazwać bezmyślnością matematyczną (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004, s. 19). Autorki podkreślają, że w szkolnym nauczaniu matematyki nie należy koncentrować się na bezmyślnym kolekcjonowaniu czynności umysłowych, bo myślenie matematyczne i rozumienie jest wspierane wtedy, gdy początkiem poznania czynimy twórcze strategie osobiste uczniów (Klus-Stańska, Kalinowska, 2004, s. 22–23). Natomiast logiczne myślenie potocznie jest postrzegane jako zdolność człowieka zapewniającą mu nie tylko funkcjonowanie, ale i prawidłowy rozwój. Utożsamiane z rozumowaniem pozwala nam na dokonywanie wyborów, podejmowanie decyzji, różnicowanie obserwowanych faktów i zdarzeń czy prawidłowe wnioskowanie oraz aktywne uczestnictwo w otaczającym nas świecie. Kazimierz Ajdukiewicz pisze: „Kto jasno i konsekwentnie myśli, ściśle i z ładem się wyraża, kto poprawnie wnioskuje i uzasadnia swe twierdzenia, o tym mówimy, że myśli i mówi logicznie”

(Ajdukiewicz, 1960, s. 3). Logiczne myślenie rozumiane potocznie jest różne od tego rozpatrywanego w dziedzinie logiki matematycznej, w której rozgranicza się dwa centralne tematy funkcjonujące w jej obrębie. Pierwszy z nich koncentruje się na regułach jasnego, konsekwentnego, ścisłego i uporządkowanego myślenia i mówienia. Drugi, zwany logiką formalną, zajmuje się poprawnym wnioskowaniem (Ajdukiewicz, 1960, s. 3). To w trakcie szkolnego kształcenia matematycznego na etapie wczesnoszkolnym będziemy opierać się na potocznie rozumianym myśleniu logicznym, by na drodze stopniowej formalizacji w klasach starszych docelowo budować wiedzę opartą na ścisłych regułach i formalnym rozumowaniu.

2.1.3. Odkrywanie a typy rozumowań

Wracając do dziecięcego odkrywania matematyki, skierujemy naszą uwagę na drogę poszukiwania odpowiedzi na pytanie: Czy oprócz myślenia i myślenia matematycznego możemy mówić o rozwijaniu logicznego myślenia w procesie kształcenia? W tym celu przyjrzymy się rodzajom rozumowań, które mogą wystąpić na drodze odkrywania matematyki. Rozumowanie polegające na prawidłowym wyprowadzaniu wniosków na podstawie danych i przyjętych na gruncie danej dziedziny zasad początkowo przez psychologów uznawane było jako takie, które opisujemy, uwzględniając prawa logiki (Ledzińska, Czerniawska, 2011). Okazało się jednak, że jest to błędne założenie, bo „zdecydowanie częściej posługujemy się heurystykami, przybliżonymi, słabiej określonymi regułami, niż algorytmami, pewnymi zasadami” (Ledzińska, Czerniawska, 2011, s. 54). Nie mniej jednak rozumowanie, czyli sposób myślenia, może mieć charakter indukcyjny lub dedukcyjny. Rozumowanie dedukcyjne będzie postępowaniem, którego celem jest dojście do określonego wniosku tylko na podstawie przesłanek, bez konieczności budowania nowych pojęć lub twierdzeń. Początkiem rozumowania dedukcyjnego jest ogólne stwierdzenie, przyjęta teoria, na podstawie której formułujemy hipotezy, by w wyniku obserwacji dojść do ostatecznego wniosku. Mówimy, że przeprowadzając rozumowanie dedukcyjne, przechodzimy „od ogółu do szczegółu”. Natomiast przy rozumowaniu indukcyjnym początkiem jest obserwacja umożliwiająca nam gromadzenie informacji, by na ich podstawie wysnuć prawdopodobny, ogólniejszy w stosunku do obserwowanych danych, wniosek. Tu rozumowanie prowadzimy „od szczegółu do ogółu”. Pamiętajmy, że rozumowanie indukcyjne może być zawodne, bo jego podstawą czynimy dostrzeżone zachowanie, wzór czy regułę. Opiera się

na doświadczeniu i naszych spostrzeżeniach, zatem może potwierdzić pozorną prawdę. Inaczej jest w przypadku rozumowania dedukcyjnego, kiedy wnioskując na podstawie prawdziwych przesłanek, zawsze uzyskujemy prawdę, oczywiście pod warunkiem poprawnego wnioskowania. Jednak to właśnie rozumowanie indukcyjne jest sposobem myślenia podczas dziecięcego odkrywania pojęć, reguł i własności matematycznych. Niemające racji bytu na poziomie wczesnej edukacji formalne teorie matematyczne nie mogą stanowić podstawy dziecięcych poszukiwań i rozważań. Mali matematycy, w wyniku obserwacji i doświadczeń dokonywanych na rzeczywistych obiektach, formułują nowe dla nich teorie matematyczne, które – początkowo wsparte własnymi doświadczeniami i intuicją – z czasem ulegają przekształceniom pod wpływem stopniowo formalizowanej matematyki szkolnej.

Analizując procesy umysłowe zachodzące podczas kształcenia matematycznego, szczególnie w pracy nad odkrywaniem nowej wiedzy matematycznej, Z. Krygowska wyróżniła trzy typy rozumowań (Krygowska, 1979, s. 137 i dalsze). Pierwszy nazywa wnioskowaniem empirycznym. Pojawia się on w sytuacji, gdy na podstawie przeprowadzonych doświadczeń w świecie materialnym i uzyskanych w trakcie obserwacji wyników formułujemy hipotezę matematyczną, a także wtedy, gdy po wykonaniu ciągu prób matematycznych (np. wykonując pewne obliczenia) dostrzegamy pewną zależność i podpierając się rozumowaniem indukcyjnym, formułujemy swoje spostrzeżenia w postaci hipotezy matematycznej, postępując tak, jak w naukach przyrodniczych (Krygowska, 1979, s. 137).

Zilustrujmy przykładem sytuację, w której możemy mówić o wnioskowaniu empirycznym we wczesnej edukacji. Niech uwaga uczniów zostanie skupiona na porównaniu i poszukiwaniu zależności między sumą kątów wewnętrznych w trójkącie i czworokącie. Zadaniem uczniów będzie odkrycie, że suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest dwukrotnie większa od sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie. W tym celu prosimy ich, aby wycieli dwa identyczne trójkąty i dwa różne czworokąty z przygotowanych wcześniej materiałów, następnie „odcieli rogi” w każdym z tych trójkątów i wypełnili nimi kąty najpierw w jednym, a potem w drugim czworokącie. Przyglądając się uzyskanym результатам i dyskutując o nich, uczniowie sformułują swoje spostrzeżenia. Po wysunięciu przez uczniów hipotezy, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest dwukrotnie mniejsza od sumy miar kątów wewnętrznych w czworokącie, prosimy o sprawdzenie przypuszczenia odnośnie do innych trójkątów

i czworokątów. Oczywiście w tym celu wyposażamy uczniów w różne modele trójkątów, aby dostrzegli, że mimo różnic w wyglądzie ich trójkątów i czworokątów wniosek jest taki sam. Aby wzmocnić uczniów w przekonaniu o prawdziwości uzyskanego rezultatu, warto przedłużyć proces wnioskowania empirycznego, prosząc o wykonanie rysunku „własnego czworokąta” i podzielenie go odcinkiem łączącym dwa niesąsiadujące z sobą wierzchołki (narysowanie przekątnej czworokąta). Rozmowa o rysunkach powinna wesprzeć wcześniej sformułowany wniosek.

Drugim typem, mającym duże walory dydaktyczne w poznaniu matematycznym, jest rozumowanie intuicyjne. Spotykamy się z nim w praktyce szkolnej wtedy, gdy uczeń podczas rozwiązywania danego zagadnienia wykorzystuje wyobraźnię, czyli obrazy pojęć często niepoparte formalnymi definicjami matematycznymi. Na ich podstawie, przy uwzględnieniu oczywistych dla niego przesłanek, przeprowadza rozumowanie, formułuje hipotezy matematyczne czy uzasadnia swoje wnioski (Krygowska, 1979, s. 144). Przykładem rozumowania intuicyjnego jest dostrzeżenie takiej samej zależności między prostopadłością a sześciąną co prostokątem i kwadratem.

Ostatnim typem rozumowania – tym, do którego dążą zabiegi dydaktyczne nauczycieli – jest rozumowanie formalne. W tym wypadku uczeń ma pełną świadomość przyjętej podstawy dedukcji i każdy następny wniosek wyprowadza precyzyjnie, wykorzystując poznane wcześniej twierdzenia i definicje. Wykorzystuje je świadomie, z pełną kontrolą przyjętych na ich poziomie założeń. Z tym typem rozumowania mamy niezwykle rzadko do czynienia we wczesnej edukacji. Niedojrzałość matematyczna uczniów i ich możliwości poznawcze kierują działania dydaktyczne na wspieranie wnioskowania empirycznego i rozumowania intuicyjnego, które nie tylko stanowią podstawę formalnej matematyki, ale – co najważniejsze dla dzieci – pozwalają dostrzec zależności w świecie fizycznym i ich odpowiedniki prowadzące do formalnego, aksjomatyczno-dedukcyjnego i wysoce abstrakcyjnego świata matematyki. Warto również dodać, że rozumowanie intuicyjne i formalne przeplatają się ze sobą w przestrzeni matematycznej, a dokładniej – na etapie szkolnego uczenia się oraz formalnego uprawiania matematyki. Z. Krygowska nazywa je dwiema stronami tego samego medalu, bo „w każdym formalizmie pozostaje jakieś reziduum intuicyjne (choćby w regułach posługiwania się symbolami), w każdym rozumowaniu intuicyjnym w matematyce interweniuje poznana uprzednio wiedza matematyczna, która ma charakter formalny” (Krygowska, 1979, s. 132).

2.1.4. Odkrywanie jako twórczość dziecka

Pojęcie twórczości należy do jednych z najbardziej niejednoznacznych terminów współczesnego języka. Twórczością interesują się tak obszerne dziedziny, jak filozofia, psychologia, teoria kultury, a także matematyka. Obecnie dużo mówi się o potrzebie wspierania twórczego działania dzieci, które często w praktyce edukacyjnej kojarzone jest z pracami plastycznymi (artystycznymi). Mówimy, że ktoś jest twórczy, gdy wnosi coś nowego, jest odkrywcy (Łempicka, 1969, s. 847). Rozważając uczniowską działalność w tym kontekście i odwołując się do definicji aktu odkrywania w rozumieniu Brunera, przyjmujemy, że uczeń odkrywający matematykę w toku własnej aktywności szkolnej jest twórczy. Rezultatem jego twórczości są nowe dla niego samego pojęcia matematyczne, reguły czy związki i zależności.

Matematyczna twórczość dziecka rozważana z perspektywy procesu poznawczego nie ma jednej podstawy teoretycznej. Źródeł możemy doszukać się zarówno w psychologicznych teoriach klasycznych, jak i tych, które ukształtowały się w wyniku ich krytyki (Nęcka, 1995). Nie można pominąć jednak osiągnięć Joya P. Guilforda, który w swoich pracach nad intelektem i kreatywnością człowieka koncentrował się na różnicach indywidualnych, które uczynił podstawą do rozważań o możliwościach twórczych jednostki. To jemu zawdzięczamy koncepcję myślenia dywergencyjnego, którego doszukiwał się w cechach osób twórczych. Myślenie dywergencyjne, czyli rozbieżne, polega na tym, że człowiek wytwarza wiele rozmaitych pomysłów, poszukując odpowiedzi na pytania natury otwartej – w przeciwieństwie do myślenia konwergencyjnego, czyli zbieżnego, koncentrującego się na poszukiwaniu jednego poprawnego rozwiązania. Guilford dopatrywał się myślenia rozbieżnego w twórczej działalności człowieka, jednocześnie przypisując mu takie cechy, jak płynność – polegającą na zdolności do tworzenia wielu pomysłów i rozwiązań w krótkim czasie; giętkość – uwidaczniającą się w jednoczesnym proponowaniu różnych podejść do rozwiązania tego samego problemu; oryginalność – przejawiającą się w nowych, nietypowych, wychodzących poza standardy rozwiązaniach oraz wrażliwość na problemy, czyli umiejętność wykrywania i wskazywania słabych stron rozwiązania oraz istniejących w nim luk (Guilford, 1978). Ten zestaw cech został dopełniony przez Ellisa P. Torrance’a elaboracją wyrażającą się w dbałości i staranności dopracowania pomysłu rozwiązania. Wymienione cechy, mimo że nie opisują wszystkich zdolności jednostki twórczej, mogą stanowić podstawę do projektowania i realizacji działań dydaktycznych. Przecież to właśnie o aktywności twórczej Jerzy Kuja-

wiński pisał, że jest „podejmowaną chętnie i uprawianą z zadowoleniem, opartą na własnych pomysłach i mniej lub bardziej świadomą celu osobistą działalnością ucznia, prowadzoną w poczuciu odpowiedzialności, stymulowaną zwłaszcza przez otwarte zadania problemowe zintegrowane z potrzebami dziecka i jego środowiska, której wynikiem jest stworzenie lub odkrycie przez uczącego się czegoś nowego i pożytecznego” (Kujawiński, 1990, s. 48). Dlaczego więc nie tworzyć takich możliwości naszym uczniom?

Jednym z zadań szkoły jest wspieranie twórczego myślenia uczniów. To na barkach nauczyciela spoczywa ten obowiązek, bo czyni się go odpowiedzialnym za stymulowanie twórczego myślenia poprzez organizowanie właściwych warunków procesu kształcenia. W tym kontekście ukształtowały się trzy główne nurty, które możemy wskazać w realizowanych szkolnych programach edukacyjnych. Pierwszy koncentruje się na wyrażaniu ekspresji twórczej jednostki, a dokładniej na działaniach artystycznych dziecka. Drugi odwołuje się do rozwijania myślenia twórczego poprzez rozwiązywanie problemów. Problemy stawiane przed dziećmi mają charakter praktyczny lub teoretyczny, a ich rozwiązanie jest możliwe dzięki własnej aktywności poznawczej uczniów. W aktywności uczniów w tym nurcie przyjmuje się niekontrolowany czas pracy, indywidualne tempo i wyeliminowanie ocen szkolnych. Ostatni z nurtów programów edukacji twórczej wpisuje się w zakres współczesnej heurystyki. Prekursorem wykorzystania technik heurystycznych w edukacji małego dziecka jest Torrance, którego program edukacyjny proponował skierowanie wysiłków oddziaływań dydaktycznych w stronę konstruktywnego kształtowania myślenia z zaniechaniem kreowania w działaniu postaw przystosowawczych. Zgodnie z podstawami teoretycznymi psychologii postaci przyjął, że to, co „niedokończone”, naturalnie pobudza potrzebę uzupełnienia i wyzwala twórcze uczenie się. Podstawą całego programu uczynił indywidualizację procesu kształcenia, konieczność uwzględniania preferencji poznawczych ucznia, jego stylu myślenia i uczenia się oraz predyspozycji osobowościowych. W zaproponowanych przez niego rozwiązaniach dominują zadania i ćwiczenia wspierające wrażliwość na problemy, dostrzeganie i odkrywanie luk w informacjach czy stymulowanie myślenia dywergencyjnego ze szczególnym uwzględnieniem takich jego cech, jak płynność, giętkość i oryginalność myślenia (Sołowiej, 1985).

Na naszym rodzimym gruncie również mamy wiele propozycji podejmujących problem wspierania i rozwijania myślenia twórczego dzieci (Pietrasiński, 1980; Kozielecki, 1996). Wsparte licznymi rozwiązaniami dydaktycznymi wzbogacającymi warsztat metodyczny nauczyciela stanowią cenne źródło nauczyciel-

skich inspiracji, gotowych materiałów w postaci zadań i ćwiczeń czy prostych reguł heurystycznych. Mimo wartościowych propozycji dydaktycznych (Szmidt, 1997; Szmidt, Bonar, 1998; Gnitecki, 2007), w praktyce szkolnej nauczycielskie myślenie o twórczości dziecka zdaje się trwać w nurcie ekspresji twórczości (Wasiłewska, 2014). Rozwiązaniem umożliwiającym przełamanie takiego postrzegania twórczości dziecka w szkolnym procesie kształcenia jest koncepcja odkrywania matematyki. Wyzwała ona naturalną ciekawość dziecka oraz jego działania twórcze, a przede wszystkim uwalnia od blokującego poznanie i rozumienie matematyki transferu wiedzy charakterystycznego dla podejścia tradycyjnego. Jednak to nie programy i ciekawe materiały dydaktyczne pozwolą na reorganizację myślenia o nauczaniu matematyki. Szeroko zakrojone doszkalanie w formie warsztatów, realizowanych programów i projektów edukacyjnych, wsparte opieką merytoryczną, pozwoli na dostrzeżenie innych możliwości realizacji treści matematycznych. Ponadto zmiany warto rozpocząć już na etapie kształcenia przyszłych nauczycieli, pamiętając o tym, że oni również doświadczyli nauczania polegającego na rozwiązywaniu zadań „na sposób nauczycielski” i muszą pokonać trudność wyzwolenia się z takiego postrzegania matematycznego procesu kształcenia.

2.2. Odkrywanie a kształtowanie pojęć matematycznych

Pojęcie jest rzeczownikiem pochodzącym od czasownika *pojąć*, czyli ‘zrozumieć, ogarnąć umysłem, przyswoić, a także posługiwać się nim prawidłowo i swobodnie’. Opisane jako jeden z podstawowych procesów myślenia, odzwierciedla i całościowo ujmuje istotne cechy przedmiotów lub zjawisk (Łempicka, 1969, s. 590). Każda dziedzina wiedzy, w tym matematyka, posiada zasób pojęć, za pomocą których opisuje swoje dokonania, tworząc przestrzeń do dalszego jej odkrywania, zgłębiania czy podziwiania. Wyjątkowość pojęć matematycznych podkreślano niejednokrotnie. Henryk Klakla przekonuje nas, że pojęcia matematyczne tym różnią się od pojęć z innych dziedzin, że oprócz roli, jaką odgrywają w porządkowaniu i opisywaniu faktów, stanowią podstawę rozumowania matematycznego (Klakla, 2002, s. 263–273). Z. Krygowska uznaje, że są niezwykle istotne w kształceniu uczniów, a jednym z najważniejszych celów nauczania jest rozumienie poznawanych pojęć i umiejętność posługiwania się nimi w toku rozwiązywania problemów (Krygowska, 1997b, s. 79 i dalsze). Danuta Gierulanka podnosi rangę pojęć matematycznych, wskazując na ich dostrzegalną jednoznaczność w porównaniu z pojęciami z innych dziedzin oraz możliwość uniknięcia

kontekstowości, kryterialności klasyfikacji, czyli wieloznaczności (Gierulanka, 1958). Kolejną cechą wyróżniającą pojęcia matematyczne spośród innych jest ich bezsprzeczna abstrakcyjność. Oznacza to, że nie możemy poznawać pojęć matematycznych za pomocą zmysłów tak, jak to ma miejsce w przypadku pojęć potocznych (naturalnych), czyli posiadających swoje odpowiedniki w świecie materialnym. Właśnie ta ostatnia z przywołanych cech zazwyczaj bywa przyczyną trudności pojawiających na drodze ich kształtowania. Niestety nie możemy wyeliminować pojęć matematycznych, bo to one budują matematyczną przestrzeń. Dzięki nim opisujemy dostrzegalne w rzeczywistości fakty i zachodzące między nimi relacje, a formułowane na ich podstawie reguły i prawa matematyczne mają swoje zastosowanie w wielu dziedzinach wiedzy i życiu codziennym. Pojęcia jako bardzo ważny materiał myślenia zajmują szczególne miejsce we wszystkich dziedzinach, nie tylko w matematyce. Są początkiem i podstawą działalności człowieka w obrębie każdej z nich, dlatego właśnie proces kształtowania pojęć zajmuje tyle uwagi w rozważaniach nad właściwą organizacją środowiska uczenia się uczniów. Wielość i różnorodność mechanizmów uczenia się pojęć, chociażby poprzez dostrzeganie podobieństwa, dedukcję z wcześniejszych doświadczeń, indukcję czy poszukiwanie znaczeń, nie pozwala na wyznaczenie jednej procedury prowadzącej do ich nabywania (Piłat, 2007, s. 234). W rozważaniach obejmujących proces ich kształtowania uwzględniłam zatem kilka aspektów, tj. rodzaje pojęć, drogi prowadzące do ukształtowania nowego pojęcia, etapy kształtowania pojęć czy – wreszcie – ich definiowanie. W tym miejscu warto podkreślić, że kształtowanie nowych pojęć jest procesem, podczas którego tworzą się coraz bardziej obiektywne podstawy do wydawania sądów, rozwoju rozumowania i wnioskowania, a także do coraz sprawniejszego nabywania pojęć ogólnych i operowania nimi (Wołoszynowa, 1975, s. 614).

Jednym z pierwszych badaczy, który podzielił pojęcia na potoczne i naukowe, był Lew Wygotski. Według niego pojęcia potoczne rozwijają się w wyniku własnej aktywności jednostki pod warunkiem zaistnienia dwóch grup czynników, tj. materiału realnego i słownego. To właśnie na podstawie doświadczeń jednostki z rzeczywistymi obiektami i w wyniku uruchomienia procesu abstrahowania powstają pierwsze spontaniczne pojęcia, często wcześniej pokonując drogę od prymitywnej formy poprzez synkrety, kompleksy i pseudopojęcia. Te ostatnie nie są odpowiednikami pojęć naukowych, a ich równoważnikami (Wygotski, 1989). Natomiast w kontakcie z materiałem słownym, czyli drugą grupą czynników, dziecko poznaje znaczenie wyrazów w różnych kontekstach i posługuje się nimi

intuicyjnie, zresztą niejednokrotnie bardzo trafnie. Pojęcia naukowe, czyli te, które są celem formalnej edukacji, powstają według Wygotskiego w planowej współpracy z osobą dorosłą, zatem w warunkach szkolnych z nauczycielem odpowiedzialnym za proces ich kształtowania. W praktyce edukacyjnej najczęściej pojawiają się w postaci definicji lub jej surogatów, tj. luźnych określeń, quasi-definicji, opisów dostrzeżonych cech czy charakterystyk (Konior, 2002). Stopień ich formalizacji zależy w dużej mierze od poziomu możliwości poznawczych dziecka i dotychczas wprowadzonej wiedzy. I tak chociażby trójkąt, który możemy definiować za pomocą łamanej zwyczajnej zamkniętej, prostych wyznaczonych przez trzy niewspółliniowe punkty na płaszczyźnie czy – jak ma to miejsce w edukacji wczesnoszkolnej – jako figurę geometryczną o trzech wierzchołkach i tyluż bokach, jest przykładem różnie definiowanego pojęcia. Należy pamiętać, że każde pojęcie, również matematyczne, ma swój zakres i treść. Zakresem pojęcia będzie zbiór desygnatów, zaś treścią zestaw cech pozwalających zakwalifikować danego reprezentanta do zbioru. Powracając do naszego trójkąta – zakresem będzie każdy trójkąt bez względu na długość boków czy rozwartość kątów, a treścią takie cechy, jak trzy boki, trzy kąty i trzy wierzchołki. Zdaniem Wygotskiego pojęcia potoczne rozwijają się od konkretnych przykładów do uogólnień, natomiast naukowe odwrotnie, tj. od ogólnych sformułowań do konkretnych przykładów. Wróćmy jeszcze raz do naszego trójkąta, który początkowo jest postrzegany przez dziecko jako zaobserwowany obiekt. Będzie on wtedy pojęciem potocznym. Gdy uczeń skieruje uwagę na elementy obiektu i na ich podstawie będzie rozstrzygał o przynależności desygnatu do grupy o tych cechach, to zacznie budować system i wejdzie na drogę pojęcia naukowego. To właśnie obecność systemu pozwala na operowanie pojęciami i tworzenie klasyfikacji tych pojęć zamiast posługiwania się nimi jako jednostkowymi bytami (Konior, 2002).

Gustaw Treliński w swoich rozważaniach o pojęciach matematycznych postawił trzy ważne pytania określające ich różne aspekty. Pierwsze identyfikuje treść pojęcia *Co to jest?*, drugie odnosi się do procedury wyznaczania obiektu: *Jak to wykonasz? Jak to wyznaczyć?* i ostatnie, związane z symbolem, czyli kodem określającym obiekt: *Jak to zapiszesz?* (Treliński, 2004). Ta trójaspektowość w planowaniu i realizacji procesu dydaktycznego obliuguje do wykorzystywania zadań pozwalających identyfikować dane pojęcie, wskazać cechy odróżniające je od innych czy wreszcie przyjąć kod będący odpowiednikiem pojęcia. W dydaktyce matematyki nabywanie pojęć jest określane jako proces, który do systemu posiadanej przez uczącego się wiedzy włącza nowe informacje i wyraża

się umiejętnością stosowania ich w sytuacjach zadaniowych (Bilewicz-Kuźnia, 2014, s. 100–105). Według Jana Koniora proces kształtowania pojęć matematycznych nadal kryje wiele tajemnic (Konior, 2002), jednak wszyscy są zgodni co do tego, że złożony jest z kilku następujących po sobie etapów. To właśnie wśród prawidłowości kształtowania pojęć Wincenty Okoń wskazuje etapowość, która wyznacza drogę prowadzącą od kojarzenia nazw z obiektami, budowania „przedpojęć” na podstawie zewnętrznie dostrzeganych cech, do formułowania pojęcia naukowego (Okoń, 1995, s. 144). Z etapowością związany jest psychologiczny proces interioryzacji, który uznaje się za podstawę kształtowania pojęć abstrakcyjnych. Określony przez ciąg czynności prowadzi od doświadczeń w świecie rzeczywistym, tj. działań konkretnych na obiektach materialnych, poprzez czynności wyobrażeniowe mające swoje źródła i odniesienie w czynnościach konkretnych, aż do czynności abstrakcyjnych, czysto umysłowych, istniejących i funkcjonujących niezależnie od konkretnych działań i poznania zmysłowego. Ważnym aspektem kształtowania pojęć, na który zwrócił uwagę Milan Hejny, jest zainteresowanie uczącego się danym pojęciem. Wyszczególnione przez niego etapy, tj. etap zainteresowania pojęciem (faza motywacji), etap działań, w wyniku których gromadzimy wstępne doświadczenia (etap modeli izolowanych), etap porównywania wyizolowanych modeli między sobą, ich hierarchizowanie (etap modeli uniwersalnych), etap wglądu w pojęcie (podniesienie abstrakcji) oraz etap powiązania wiedzy istniejącej z nową (etap krystalizacji) budują stopnie mechanizmu rozwojowego pojęć, które na zajęciach matematycznych muszą pokonać uczniowie (Hejny, 1997). Niezbędna w takiej sytuacji będzie niewątpliwie samodzielność intelektualna dziecka, która w matematyce stanowi podstawę poznania. Samodzielność intelektualna, czyli indywidualny, właściwy jednostce ciąg czynności umysłowych, pozwala na rozbudowywanie (proces asymilacji) oraz reorganizację (proces akomodacji) dotychczas istniejących struktur umysłowych. Natomiast jej indywidualny charakter ma swoje odzwierciedlenie w potrzebie takiej organizacji pracy, która wyzwala działania i wzmacnia aktywność dziecka. Mając na uwadze, że prawidłowe kształtowanie pojęć wiąże się z indywidualnymi preferencjami poznawczymi jednostki (Nosal, 1990, s. 147) oraz drogami ich nabywania, to proces budowania przez uczniów pojęć w warunkach szkolnych wymaga starannego planowania i realizacji, za co odpowiedzialnym staje się nauczyciel.

Zofia Krygowska proponuje dwie drogi wprowadzania pojęć matematycznych. Pierwsza z nich rozpoczyna się wprowadzeniem nowej definicji przez

nauczyciela lub podręcznik, a następnie zostaje zilustrowana właściwymi przykładami. Druga wprowadza nowe pojęcia poprzez taką organizację aktywności ucznia, że przy dyskretnym wsparciu nauczyciela dziecko samo odkrywa i formułuje definicję (Krygowska, 1977b, s. 79). Pierwszą z tych dróg określiłabym jako kształtowanie pojęć od zewnątrz, bo główną jego cechą jest przyjęcie gotowego opisu i przybliżanie jego rozumienia poprzez przykłady. Natomiast drugi sposób zdecydowanie charakteryzuje podejście od wewnątrz. To właśnie tu rozumienie kroczy przed nowym pojęciem (Dąbrowski, 2008), a w trakcie jego kształtowania rozwijają się: umiejętność porównywania, analizowania, formułowania wniosków czy argumentowania własnego stanowiska. Z. Krygowska nie neguje żadnej z dróg, co więcej, przekonuje, że zarówno pierwsza, jak i druga powinny mieć swoje miejsce w praktyce edukacyjnej. Która z nich lepiej się sprawdzi we wczesnej edukacji? Podejmując się próby odpowiedzi na pytanie, warto pamiętać, że matematyka w najmłodszych klasach ma charakter propedeutyczny, a dziecko w kolejnych latach szkolnych jest coraz mocniej zanurzane w jej abstrakcyjnym świecie, dlatego uznaję, że nabywanie pojęć drogą ich odkrywania będzie zdecydowanie lepszym rozwiązaniem, dla którego warto przeciwstawić się wewnętrznej potrzebie tłumaczenia i objaśniania uczniom matematyki, aby mogli oni skorzystać z drogi odkrywania.

Drogę, na którą chcemy skierować uczniów, aby odkrywali nowe pojęcia, możemy ująć w pewien schemat. Na początku zawsze wykonujemy analizę teoretyczną pojęcia i wyznaczamy niezbędne operacje myślowe, które chcemy, aby stały się samodzielnymi czynnościami uczniów. Następnie, uwzględniając uczniowski poziom rozumienia pojęć, przystępujemy do planowania zadań do realizacji. To właśnie w trakcie rozwiązywania zadań uczniowie wyróżniają wspólne cechy rozważanych obiektów. Dostrzeżone cechy stanowią podstawę nowego pojęcia i pozwalają uświadomić młodemu odkrywcom, że ze wszystkich obiektów posiadających wskazane cechy wynika pewien fakt matematyczny. Kolejnym krokiem będzie zbadanie, czy z przynależności do grupy obiektów wynika, że dany obiekt rzeczywiście posiada wszystkie wcześniej wskazane cechy. Dopiero po tych ustaleniach następuje formułowanie uczniowskich spostrzeżeń w formie definicji i nadanie nazwy rozważanym obiektom lub zjawiskom (Krygowska, 1977b). Dodajmy, że w trakcie pracy nad nowym pojęciem uczniowie „utrwalają to, co znane, wykonując równocześnie pierwsze kroki w stronę tego, co ma być poznane” (Krygowska, 1977b, s. 82), a to stanowi główną zasadę nauczania problemowego.

Przykład

Osiągnięcia w zakresie rozumienia pojęć geometrycznych.

Uczeń: dostrzega symetrię w środowisku przyrodniczym, w sztuce użytkowej i innych wytworach człowieka obecnych w otoczeniu dziecka⁴.

Proponowane pojęcie: symetria osiowa

Analiza teoretyczna i wskazanie istotnych cech pojęcia:

Symetria względem prostej l (symetria osiowa lub lustrzana) to takie przekształcenie, w którym obrazem punktu P jest punkt P' jeśli: P i P' leżą na prostej prostopadłej do prostej l , P i P' leżą po przeciwnych stronach prostej l i w tej samej odległości od l . Jeśli punkt P leży na prostej l , to jego obrazem jest ten sam punkt. Prostą l nazywamy osią symetrii, a o punktach P i P' mówimy, że są symetryczne względem prostej l .

Oczywiście przywołana powyżej definicja nie umożliwi uczniom wczesnej edukacji wskazywania symetrii w przyrodzie czy sztuce użytkowej. Została przywołana w celu wyodrębnienia istotnych cech rozpatrywanego pojęcia. Na podstawie analizy teoretycznej możemy wyróżnić następujące cechy:

- prosta, według której dokonano przekształcenia, czyli oś symetrii,
- taka sama odległość punktu i jego obrazu od osi symetrii,
- położenie punktu i jego obrazu na prostej prostopadłej do osi symetrii.

To właśnie wyodrębnione przez nauczyciela cechy muszą zostać ubrane w czynności, które uczniowie wykonają podczas zajęć.

Proces kształtowania pojęć rozpoczyna się od doświadczeń dziecka, a kończy, gdy dziecko samodzielnie zbuduje definicję pojęcia i rozumnie z niej skorzysta na drodze dalszego poznawania matematyki. W literaturze poruszającej problem kształcenia matematycznego we wczesnej edukacji dominują dwie drogi odkrywania pojęć. Nie zostały one wyróżnione ze względu na przyjęte *a priori* rozwiązanie metodyczne, a rozróżnienia dokonano na podstawie rodzaju pojęcia

⁴ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. z 2017 r., poz. 356).

matematycznego, tj. arytmetycznego i geometrycznego, a dokładniej – zwrócono uwagę na źródła doświadczeń obejmujących dane zagadnienie matematyczne. Kształtowanie pojęć arytmetycznych rozpoczyna się manipulowaniem obiektami świata rzeczywistego, kiedy dzieci wykonują różne czynności, m.in. zliczają obiekty, grupują, porządkują, dodają, odejmują, mnożą i dzielą. To na ich podstawie kształtują się takie pojęcia, jak liczby naturalne czy działania arytmetyczne. Trwa to tak długo, aż wykonywane czynności staną się zinterioryzowanymi czynnościami umysłowymi. Opatrzone symbolami matematycznymi są podstawą operacji matematycznych. Co więcej, symbole z czasem przestają pełnić tylko funkcję przedstawiania operacji, stają się obiektami mentalnymi, na których również wykonujemy operacje. Druga z nich opiera się na postrzeganiu tego, co nas otacza, a dokładniej – obserwowaniu przestrzeni i dostrzeganiu kształtów. Spostrzeżone kształty początkowo ujmowane są przez dziecko holistycznie. Z czasem, poprzez poznanie zmysłowe i opis słowny, przekształcają się w zbiór cech danego obiektu geometrycznego. Te z kolei, tak jak w przypadku liczb, są rozważane w kontekście podobieństw i różnic, aby móc wyodrębnić zachodzące między nimi zależności (Tall, 2014). Jednak bez względu na początek poznania, mechanizm, który im towarzyszy, jest taki sam. Aktywność własna jednostki wsparta odpowiednią liczbą doświadczeń powoduje, że to, co zewnętrznie dostrzegalne i wykonane na obiektach rzeczywistych, staje się czynnością umysłową. Proces kształtowania pojęć matematycznych prowadzi do definiowania obiektów matematycznych, w którym kluczową rolę odgrywają abstrahowanie i uogólnianie (Semadeni, 1981, s. 55–56). Ponadto dzięki tym właśnie operacjom myślowym dzieci łączą obiekty matematyczne w klasy na różnych poziomach ogólności (Filipiak, Lemańska-Lewandowska, 2015).

Definiowanie, którego dzieci doświadczają na pierwszym etapie edukacyjnym, nie osiąga poziomu naukowości. Bardzo często ma charakter intuicyjny, uwzględniający tylko podstawowe cechy obiektu. Dzieje się tak z bardzo prostej przyczyny – to poziom abstrakcyjności rozważanych treści matematycznych zawsze powinien być zgodny z aktualnymi możliwościami poznawczymi dziecka, nie odwrotnie. To implikuje kolejny, bardzo istotny wątek nauczania matematyki, czyli potrzebę jej spiralnego nauczania. Sposób ten daje możliwość wielokrotnego, wydłużonego w czasie poznawania matematyki w coraz dojrzały sposób, a przede wszystkim odpowiadający możliwościom rozwojowym i potrzebom edukacyjnym dziecka. Między innymi dlatego, organizując nauczanie matematyki, nie koncentrujemy się tylko na tu i teraz. Planowanie dydaktyczne powin-

no rozpoczynać się w miejscu „co dotychczas osiągnęło dziecko”, a kończyć w punkcie „dokąd zmierzam”. Takie podejście do nauczania nie tylko uwzględnia czasową rozciągłość kształcenia matematyki, ale utwierdza nas w przekonaniu, że uczniowie koniecznie muszą odkrywać wiedzę matematyczną i systematycznie uzupełniać o swoje odkrycia ukształtowane dotychczas struktury myślowe.

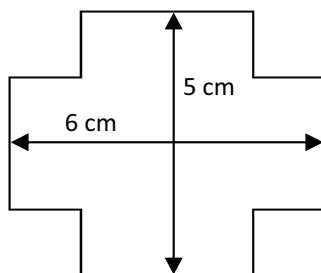
Definicja rozumiana jako zdanie oznajmujące, które określa znaczenie nowego terminu, znaku, wyrażenia za pomocą wcześniej poznanych (Łempicka, 1969, s. 108) w kształceniu matematycznym we wczesnej edukacji najczęściej występuje w postaci wyjaśnienia lub opisu definicyjnego (Krygowska, 1977b, s. 96). Dzieci, podejmując próbę opisu pewnego faktu matematycznego, zazwyczaj formułują go w języku potocznym. Dziecięce opisy bazują na terminach poznanych w dotychczasowym toku kształcenia i koncentrują się na tym, jak obiekt wygląda lub do czego jest wykorzystywany. Przykładem takiego bardzo obrazowego formułowania pojęć matematycznych jest wypowiedź ucznia klasy pierwszej szkoły podstawowej. Zapytany o to, czy zna jakieś figury geometryczne, odpowiada: koło, kwadrat, trójkąt i prostokąt. Poproszono zatem ucznia, aby wyjaśnił, jak rozróżnia te figury. Uczeń pokazał w powietrzu kształt trójkąta i odpowiedział: „Ma takie trzy kreski i trzy rogi. A kwadrat ma takie cztery”. Prowadząc dalej rozmowę, dowiedziałam się, że koło jest okrągłe i nie ma rogów. Zapytałam, jak w takim razie odróżnia kwadrat od prostokąta. W odpowiedzi usłyszałam, że kwadrat jest bardziej równy niż prostokąt. Tę równość figury, jak się czytelnik domyśla, dziecko odnosiło do długości boków. Sposób opisanie wymienionych figur geometrycznych dalece odbiega od tego, co możemy określić mianem definicji. Jednak możemy ją uznać, szczególnie na początku edukacji szkolnej, jako punkt startowy na długiej drodze do formalnego zdefiniowania wskazanych figur geometrycznych. Z przytoczonej rozmowy wyraźnie wynika, że uczeń nie tylko rozpoznaje kształt, ale także wskazuje elementy obiektu, mówiąc o rogach i kreskach. Nietrudno rozpoznać, że nasz rozmówca znajdował się na poziomie wizualnym według Pierre’a van Hiele’a, twórcy koncepcji kształtowania pojęć geometrycznych (Swoboda, 2006). Tak faktycznie jest najczęściej – dziecko poproszone o określenie pojęcia matematycznego mówi wszystko, co wie na jego temat, nie eliminuje własności wynikających z siebie nawzajem czy nadrzędnych w stosunku do siebie. Często zatem zdarza się, że dziecięce opisy zawierają nadmierną lub zbyt małą liczbę cech danego obiektu. Pojawiają się zwroty nieprecyzyjne, zaczerpnięte z języka potocznego, tak jak w przypadku wspomnianych rogów w figurach geometrycznych. Takie próby definiowania pojęć będziemy określali za Z. Krygowską mianem opisu prymitywnego

lub bezpośredniego (Krygowska, 1977b, s. 96). Ponadto Z. Krygowska wyróżnia opisy generalizujące i konstruujące. Zadaniem pierwszego z nich jest rozszerzanie wiedzy uczniów i otwieranie drogi do matematyki na wyższym poziomie, natomiast drugiego nie tyle wyraźne określenie obiektu, co wyłonienie go w toku kolejnych prób wyjaśniania (Krygowska, 1977b, s. 95–96).

Wśród pojęć matematycznych, z którymi uczniowie spotykają się w toku kształcenia, Bogdan Nowecki wyróżnia trzy grupy. Pierwsza z nich obejmuje te, które funkcjonują w języku potocznym i są przez dzieci rozumiane intuicyjnie. W drugiej umieścił ten zakres pojęć, z którymi dziecko spotkało się w toku wcześniejszego kształcenia, natomiast do trzeciej zaliczył nowe, nieznane dzieciom pojęcia, które zostaną wprowadzone definicją (Nowecki, 2001). Występowanie tych trzech grup pojęć w praktyce edukacyjnej zwraca uwagę na możliwe trudności w nauczaniu matematyki. Trudności te dotyczą działalności nauczyciela, szczególnie we wczesnej edukacji, kiedy sformalizowana wiedza nauczycielska i często łącząca się z nią nieumiejętność śledzenia dziecięcych dróg rozumowania matematycznego staje się przyczyną pomijania w toku kształcenia rozumienia intuicyjnego dzieci i dotychczas zgromadzonej przez nich wiedzy na rzecz podawania gotowej definicji i prób jej wyjaśniania. To właśnie projektowanie sytuacji dydaktycznych umożliwiających uczniom samodzielne nabywanie pojęć pozwoli na wyeliminowanie tej trudności, która niestety nie jest rzadkością w praktyce edukacyjnej.

Piotr Zarzycki, rozważając modelowanie pojęć matematycznych, koncentruje się na całościowym ujęciu procesu, a uczniowskie definicje we wczesnej edukacji określa mianem potocznych (wtedy gdy mamy do czynienia z intuicyjnym rozumieniem danego pojęcia), następnie poglądowych (tam gdzie występuje duża liczba desygnatów wprowadzających pojęcie, czyli dużo materiałów konkretnych, np. ułamki powinny być kojarzone z połówkami i ćwiartkami), by w końcowym etapie przyjąć formę definicji formalnej (Zarzycki, 2019). Tę ostatnią przypisuje uczniom klas starszych, gdy doświadczanie matematyki jest bardziej zaawansowane, a język uczniów wzbogacony o wiele terminów matematycznych, np. studentom matematyki. Wśród reguł modelowania pojęć matematycznych wyróżnia doświadczenia dziecka, które we wczesnej edukacji powinny prowadzić przynajmniej do dwóch spośród trzech wskazanych typów definicji, tj. potocznej i poglądowej, oraz wymienia sposoby ich organizacji, przekonując do wprowadzania pojęć według koncepcji reprezentacji Brunera, gdy uczniowie – na podstawie czynności konkretnych, wyobrażonych i abstrakcyjnych – tworzą odpowiednio reprezentacje – enaktywną, ikoniczną i symboliczną pojęć (Zarzycki, 2019).

Kształtowanie pojęć matematycznych jest niezwykle wymagającym wyzwaniem dydaktycznym. Nie wystarczy bowiem, by uczniowie wiedzieli, co oznacza dane pojęcie. Powinni nabierać przekonania, że wiedzą, jak go używać podczas rozwiązywania zadań, tj. myśląc, budując strategię, realizując ją czy analizując uzyskane rezultaty. Braki w zakresie opanowania pojęć matematycznych utrudniają porządkowanie informacji, wykorzystywanie ich do opisywania i wyjaśniania wielu zależności. Przykładem braku rozumienia pojęcia suma będzie nieumiejętność określenia, jak zmieni się jej wartość, gdy jeden ze składników zmniejszymy np. o 2 lub gdy poprosimy uczniów o wyznaczenie obwodu wielokąta przedstawionego na poniższym rysunku.



W podręcznikach dla uczniów klas I–III szkoły podstawowej znajdziemy wiele przykładów zadań, które odwołują się do znajomości pojęć. Zadaniem uczniów jest odszyfrowanie informacji ukrytych w pojęciach i wykonanie na nich wskazanych operacji. W poniższym zadaniu, zaczerpniętym z materiałów ćwiczeniowych z cyklu „Ja i moja szkoła na nowo” (Faliszewska, Lech, 2019, s. 29), uczniowie, aby poprawnie rozwiązać zadanie, muszą znać następujące pojęcia: suma, różnica, iloraz, iloczyn, liczba dwu- i trzycyfrowa, jedność. Ponadto muszą wiedzieć, co oznacza element największy i najmniejszy w danym zbiorze liczb naturalnych.

Zadanie. Rozwiąż zadania

Oblicz różnicę największej liczby dwucyfrowej i największej liczby jednocyfrowej	
Oblicz iloczyn najmniejszej parzystej liczby dwucyfrowej i największej nieparzystej liczby jednocyfrowej	
Oblicz sumę najmniejszej liczby trzycyfrowej i najmniejszej liczby dwucyfrowej	
Oblicz iloraz liczby dwucyfrowej, której cyfrą jedności jest 1, a cyfrą dziesiątek 8, oraz największej liczby jednocyfrowej	

Ciekawą grupą pojęć w matematyce są pojęcia, których nie definiujemy lub określamy tylko definicję znaczeniową, np. punkt czy zbiór. Takie pojęcia nazywamy pojęciami pierwotnymi i to za ich pomocą definiujemy kolejne. Przyjęte na początku danej teorii są uznawane za pewnik. Mimo że stanowią punkt wyjścia rozważań teoretycznych, nie mogą być jednak jako pierwsze definiowane w nauczaniu szkolnym. Należy pamiętać, że rozpoczynamy kształtowanie pojęć od tych, które są wynikiem dotychczasowych doświadczeń dziecka i które z tych doświadczeń dadzą się wyabstrahować. Nazywamy je pojęciami elementarnymi. Postępujemy tak np. w przypadku elementów geometrii euklidesowej realizowanych we wczesnej edukacji, gdy rozpoczynamy od najczęściej spotykanych kształtów, tj. koło, kwadrat, prostokąt i trójkąt.

Dla osób, które choć raz w praktyce zawodowej zmierzyły się z kształtowaniem pojęć matematycznych, oczywiste jest, że nie jest to ani łatwe, ani jednorazowe działanie. Takie podejście zazwyczaj nie przynosi spodziewanych efektów. Nie sprawdzają się również proste zabiegi dydaktyczne i wyjaśnienia nauczyciela, a doświadczane przez uczniów nierozumienie pojęć przekłada się na pogłębiające się trudności matematyczne. Dlatego właśnie organizacja lekcji, na której uczniowie spotykają się z nowym pojęciem, oprócz wiedzy merytorycznej, psychologicznej i wypracowanych rozwiązań metodycznych wymaga kreatywności nauczyciela, która nie tylko ma zainteresować uczniów, ale także pobudzić do działania. Wśród pożądanych aktywności matematycznych we wczesnej edukacji możemy wyróżnić:

- obserwację zarówno kierowaną przez nauczyciela, jak i spontaniczną, bo to dzięki tej drugiej uzyskujemy informacje nie tylko o tym, co przyciąga uwagę dziecka, ale również o jego umiejętności postrzegania obiektów jako całości, wyodrębniania elementów czy dostrzegania związków i zależności między nimi,
- manipulowanie obiektami nie tylko po to, aby za pomocą dotyku zbadać cechy fizyczne obiektu, ale przede wszystkim po to, by móc wytworzyć reprezentacje enaktywne pojęć matematycznych, by badać strukturę obiektów i relacje w danych sytuacjach matematycznych,
- opisywanie słowami podejmowanych działań i własnych spostrzeżeń, a także podczas uzasadniania przyjmowanego stanowiska,
- ilustrowanie poprzez budowanie rysunkowych modeli rozwiązania zadań czy tworzenie układów geometrycznych,
- wycinanie, klejenie i konstruowanie nie tylko w zakresie geometrii, ale też na zajęciach z arytmetyki, kiedy strukturę dziesiętkowego systemu liczbowego

można przedstawiać w formie układu celowo dobranych obiektów lub gdy poszukujemy własności działań,

- tworzenie nieznanych dotąd obiektów i układów, aby później poddawać je wnikliwej analizie popartej zawsze wypowiedzią prezentującą stanowisko mówiącego.

Oczywiście powyżej zaprezentowana lista aktywności nie jest wyczerpująca, ale wskazuje, co powinno być początkiem długiego i żmudnego procesu kształtowania pojęć. Zwraca uwagę na jedną istotną cechę, a mianowicie to właśnie doświadczenia są podstawą abstrakcyjnych pojęć. Pozwalają dzieciom na dostrzeżenie ich związku z otaczającą rzeczywistością, przekonują o ich użyteczności i funkcjonalności, a izolowane i wprowadzane bez właściwej narracji tworzą niestrukturalne listy zagadnień do pamięciowego opanowania.

2.3. Odkrywanie regularności, dostrzeganie prawidłowości i budowanie własnych strategii rozwiązania

Regularności i różnorodne rytmy są powszechnym zjawiskiem w otaczającym nas świecie, począwszy od chwili poczęcia, gdy dziecko słyszy rytm serca matki, przez pory dnia i nocy, pory roku czy rytuały i obrzędy wpisane w narodowe tradycje. To właśnie one pozwalają nam porządkować otaczającą przestrzeń, regulują nasze życie, ułatwiają kojarzenie i zapamiętywanie faktów, które później przekłada się na umiejętność rozwiązywania codziennych zadań. Z tego właśnie powodu człowieka cechuje potrzeba ich wyznaczania wszędzie tam, gdzie nie narzucają się naturalnie. Takim przykładem jest język, którym się posługujemy. Margaret Donaldson zauważa, że mimo braku znajomości reguł gramatycznych i wystarczająco bogatego słownictwa małe dzieci, obserwując dorosłych, dostrzegają regularności w wypowiedziach dorosłych i potrafią porozumiewać się, budując przy tym poprawne zdania (Donaldson, 1986). Nasza zdolność do dostrzegania rytmów i regularności towarzyszy nam od najmłodszych lat, więc powinniśmy ją wykorzystać w uczeniu się matematyki. Przecież matematyka zbudowana jest na regularnościach i chcąc umożliwić dzieciom jej doświadczenie, powinniśmy ich odkrywanie uczynić jedną z najważniejszych aktywności matematycznych we wczesnej edukacji. Ponadto warto zwrócić uwagę na spostrzeżenia Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej, która pisze: „Człowiek unika, a nawet lęka się chaosu i bałaganu. Jeżeli cokolwiek się w otoczeniu powtarza i układa w rytm, przestaje budzić niepokój” (Gruszczyk-Kolczyńska, 1997, s. 31). Dajmy dzieciom poczucie bezpieczeństwa, układajmy matematykę

w całość, uczmy ich dostrzegania zależności i powiązań, pozwólmy dzieciom odkrywać matematykę.

Jak już wspomniałam, istotą matematyki jest dostrzeganie i wskazywanie regularności, a to zwraca naszą uwagę na kształcenie tych umiejętności. Przecież znać matematykę, to dostrzegać, badać i wyrażać regularności, relacje występujące między nimi, porządkować je i opisywać, a przede wszystkim wykorzystywać do celów praktycznych (National Research Council, 1990). Problem dostrzegania i badania przez uczniów regularności w przestrzeni matematycznej był poruszany niejednokrotnie i obejmował wszystkie etapy kształcenia (por. Siwek, 1985, 1988; Turnau, 1988; Maj-Tatsis, Swoboda, 2006). Ewa Swoboda i Bożena Maj-Tatsis zwracają uwagę, że wymagania skierowane do uczniów w tym obszarze pojawiają się już w klasie pierwszej, np. tam, gdzie zadaniem jest dostrzeżenie rytmów nie tylko w przyrodzie czy organizacji czasu, ale również we wzorkach, czyli układach figur o określonej cykliczności. Przyglądając się samej konstrukcji treści matematycznych ujętych w programach nauczania dla pierwszego etapu edukacyjnego, możemy owe regularności odnaleźć chociażby:

- a) we własności liczb naturalnych, gdzie każda kolejna liczba naturalna jest większa o 1 od poprzedzającej ją liczby naturalnej;
- b) przy wyznaczaniu kolejnych liczb parzystych lub nieparzystych, poczynawszy od danej liczby, gdzie każdą następną uzyskamy, dodając do poprzedniej liczbę 2;
- c) w nazewnictwie liczb, gdzie każda kolejna dziesiątka jest odwołaniem do odpowiedniej liczby w pierwszej dziesiątce, np. dwa, dwanaście, dwadzieścia dwa, trzydzieści dwa, czterdzieści dwa itd.;
- d) w strukturze dziesiętkowego systemu pozycyjnego, którym posługujemy się na co dzień, gdzie każda dziesiątka jednostek niższego rzędu tworzy jedną jednostkę wyższego rzędu;
- e) w tabliczce mnożenia, gdzie kolejne wyrazy w wierszu są wielokrotnościami liczby stojącej na pierwszym miejscu;
- f) w działaniach arytmetycznych, gdzie umiejętności rachunkowe na mniejszych liczbach pozwalają dzieciom wyznaczyć wynik dla większych liczb, np.

$$2 + 4 = 6; 20 + 40 = 60; 200 + 400 = 600$$

$$6 - 4 = 2, 60 - 40 = 20, 600 - 400 = 200$$

$$2 \cdot 4 = 8, 20 \cdot 4 = 80, 200 \cdot 4 = 800$$

$$8 : 4 = 2, 80 : 4 = 20, 800 : 4 = 200;$$

- g) w przypadku jednostek długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr lub masy: gram, dekagram, kilogram.

Oczywiście powyższe przykłady nie wyczerpują wszystkich regularności, które możemy odnaleźć w klasach I–III szkoły podstawowej, jednak i one przekonują, że umiejętność dostrzegania i wykorzystywania regularności staje się nieodzowna w uczeniu się matematyki. Oprócz regularności wynikających z konstrukcji samej matematyki pojawiają się takie, które zostały sprowokowane specjalnie skonstruowanymi zadaniami. Przykładem takich zadań są:

1. Wzdłuż parkowej alei o długości 300 metrów posadzono drzewa. Ile drzew posadzono, jeśli wysadzanie rozpoczęto na początku alei, a zakończono na jej końcu, dbając, aby odległość między kolejnymi drzewami wynosiła 20 metrów?
2. Z drewnianej listewki postanowiono zrobić kwadratową ramkę. W ilu co najmniej miejscach należy przeciąć listewkę?
3. Kasia z siostrą robiły ozdoby na choinkę. Wspólnie ustaliły, że wykonają kolorowy łańcuch. Na poniższym rysunku przedstawiono początek łańcucha dziewczynek. Dorysuj kolejne 8 ogniów. Jak myślisz, jakiego koloru będzie dwudzieste piąte ogniwo?



Celem tych zadań jest dostrzeganie sekwencyjności i porządku występowania obiektów, dostrzeganie ich układu tworzącego wzajemne relacje między obiektami i wskazywanie prawidłowości, które w dalszej części pracy nad rozwiązaniem zadania mają być wykorzystane do uzyskania poprawnego wyniku. Umiejętność obserwowania, a w tym wypadku kierowania uwagą, ma doprowadzić ucznia do poprawnej interpretacji tego, co dostrzegł. Tego typu zadania wywołują zazwyczaj wielość i różnorodność pomysłów, które sprawdzone z warunkami zadania mają stać się podstawą formułowania uczniowskich hipotez. Są to też sytuacje, w których uczniowie mogą eksperymentować, analizować własne przemyślenia, ale także konfrontować z innymi pomysłami, wyzwalając dyskusje nad rozwiązaniem połączone z uzasadnianiem własnego stanowiska.

Konsekwentnie podtrzymując potrzebę odkrywania wiedzy matematycznej w procesie kształcenia, pozostaję przy stanowisku, że nowa wiedza jest rezultatem aktywności własnej ucznia. Podążając dalej tropem wspierania umiejętności dostrzegania regularności i prawidłowości matematycznych oraz budowania własnych strategii poznania matematycznego, odnieśmy się do propozycji Zofii Kry-

gowskiej, która wskazuje cztery sytuacje wspierające wykrywanie prawidłowości matematycznych (Krygowska, 1977b, s. 100–101). Badaczka uważa, że może się to odbyć, gdy uczeń rozwiązuje specjalnie skonstruowane zadanie prowadzące celowo do odkrycia pewnej własności, prawa, zależności. Osobiście znam dwa przykłady pomocy dydaktycznych, w których dominuje takie podejście. Zarówno na stronach podręczników do matematyki z serii *Matematyka 2001*⁵, jak i w zbiorach Marii Małek *Geometria*⁶, rozwiązanie poprzednich zadań niesie ze sobą pewną wiedzę matematyczną, którą wykorzystujemy podczas rozwiązywania kolejnych. Z kolejną sytuacją spotykamy się, gdy uczeń rozwiązuje zadanie otwarte, z którego wyraźnie wynika, że autorowi zadania chodzi o wykrycie i dowód nowego twierdzenia. Następne dwie sytuacje, o których mówi Krygowska, odnoszą się do inicjatywy uczniów, tj. wtedy, gdy uczeń sam zadaje pytania lub gdy formułuje na podstawie pewnych obserwacji hipotezę. Czy możemy prowokować takie sytuacje już we wczesnej edukacji? Myślę, że nawet należy. Jednak, jak podkreśla Krygowska, niezwykle rzadko możemy obserwować uczniowskie dociekania po rozwiązaniu zadania, dlatego do sprowokowania uczniów do dalszych poszukiwań proponuję „przedłużanie” problemu jako źródło wykrywania kolejnych prawidłowości w matematyce. Rozważmy sytuację, w której uczniowie kształtowali pojęcie obwodu prostokąta. Interesującym i wartościowym matematycznie przedłużeniem moglibyśmy uczynić poszukiwania w zakresie obliczania obwodu dowolnego wielokąta. Zamiast trzymać się kurczowo twierdzenia, że obwód prostokąta to suma podwojonej długości prostokąta i podwojonej szerokości prostokąta, można sprowokować sytuację, która wywoła potrzebę określenia ogólniejszego sposobu i dostrzeżenie, że obwód wielokąta to nic innego, jak suma długości wszystkich jego boków bez względu na to, ile ich będzie miał.

Prace na temat metod pobudzania uczniów do poszukiwania i wskazywania problemów pojawiły się już w drugiej połowie ubiegłego stulecia (Krygowska, 1977, s. 102). Zaproponowana przez Ericha Wittmanna „metoda problemów tworzących” umożliwia uczniom stopniowe rozwijanie umiejętności „przedłużania” problemów. Zawsze rozpoczyna się od zadań tradycyjnych, które są dla uczniów materiałem wyjściowym. Po rozwiązaniu takiego zadania nauczyciel zachęca uczniów, aby sformułowali pytania związane z sytuacją zadaniową. Początkowo wspierani przez

⁵ *Matematyka 2001*, podręcznik do matematyki dla uczniów gimnazjum, kl. 1, 2, 3.

⁶ M. Małek (1993), *Geometria. Zbiór zadań*, cz. 1, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe; M. Małek (1994), *Geometria. Zbiór zadań*, cz. 2, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe; M. Małek (1998), *Geometria. Zbiór zadań*, cz. 3, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.

nauczyciela uczniowie stopniowo nabierają wprawy w rozważaniach o sytuacji przedstawionej w zadaniu w nowych warunkach, a początkowe zadanie staje się źródłem budowania nowych (Krygowska, 1977b, s. 102–103). W edukacji wczesnoszkolnej odpowiednikiem tej metody jest zaproponowana przez Jadwigę Hanisz metoda „kruszenia” (Hanisz, 1990) wspierająca rozwój umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych. Jedną z wersji „Co by było, gdyby ...?” polega właśnie na zmianie danych i rozwiązywaniu zadania w zmienionych warunkach. Z własnej praktyki zawodowej wiem, że uczniowie niechętnie podziwiają entuzjazm nauczyciela przy przedłużaniu zadania. Jednak przedłużanie, na stałe wpisane w szkolną praktykę edukacyjną, staje się zwyczajnym zabiegiem dydaktycznym, który faktycznie pobudza uczniów do poszukiwań. Najczęstszym efektem, z którym spotkałam się w trakcie zajęć z uczniami, było wzbudzenie czujności matematycznej i sprawdzanie poprawności rozwiązania z warunkami zadania.

Obowiązkiem nauczyciela staje się planowanie, organizowanie i kontrolowanie przebiegu aktywnego uczenia się uczniów matematyki. Planowanie obejmuje konieczność analizy teoretycznej pojęć, praw, reguł czy własności przyjętych do odkrycia przez uczniów, przygotowanie właściwych zadań lub sytuacji zadaniowych prowadzących ucznia do odkrycia, zaplanowanie pomocy dydaktycznych oraz form organizacyjnych pracy na lekcji. Organizowanie polegać będzie na przygotowaniu wszystkiego, co zostało przyjęte na etapie planowania. Natomiast kontrola nie może ograniczać się tylko do wytworów pracy uczniów. Tu kontrola jest rozumiana jako stałe monitorowanie przebiegu realizowanych przez uczniów prac oraz dyskretne reakcje na sytuacje, w których uczniowie „utkną” podczas pracy lub gdy ich spostrzeżenia będą dalece odbiegać od przyjętych do odkrycia treści lekcji. Ten ostatni punkt stanowi duże wyzwanie, nie można bowiem mówić o samodzielnej badawczej pracy ucznia, gdy nauczyciel zawsze spieszy z pomocą, aby dać gotową odpowiedź. Zadaniem nauczyciela jest sugerowanie czy nakreślanie sytuacji, w których należy rozważyć swoje odkrycie. W tym ujęciu nauczyciel staje przed trudnym problemem dydaktycznym, którego rozwiązanie powinno się koncentrować na poszukiwaniu i urzeczywistnianiu sposobów i środków postępowania dydaktycznego prowadzących do harmonijnego uruchamiania dotychczasowej wiedzy matematycznej uczniów i łączenia jej z nowo odkrytą.

Dziecięce odkrywanie matematyki proces uczenia się uczniów czyni przestrzenią ich twórczej i samodzielnej działalności. Budowana przez dzieci wiedza powstaje nie tylko na podstawie własnych poszukiwań, ale również na tych

wypracowanych wspólnie z rówieśnikami, ucząc ich przy tym porównywania przyjętych strategii rozwiązania czy konfrontowania własnych spostrzeżeń ze spostrzeżeniami innych uczniów. Skierowane do wszystkich uczniów, a nie tylko tych, o których sądzimy, że mają szczególne predyspozycje do matematyki, wspiera poszukiwanie własnych sposobów uczenia się i określania własnych metod radzenia sobie z zadaniami problemowymi. Oprócz wymiernych matematycznych korzyści, takich jak kształtowanie i budowanie nowych dla ucznia pojęć matematycznych, dostrzeganie i formułowanie nowych problemów, regularności, rozwijanie umiejętności porównywania, uogólniania, umiejętności badania zależności między obiektami matematycznymi niesie ze sobą korzyści w obszarze kształtowania postaw otwartych na poszukiwanie rozwiązań czy wzmacniania poczucie kontroli poznawczej. Robert Fisher podkreśla, że istotą kształcenia matematycznego nie jest wyuczenie odrębnych informacji, a właśnie wsparcie uczniów, aby mogli dostrzec struktury matematyczne, na które składają się wzajemnie zależne pojęcia i procedury (Fisher, 1999, s. 203–204). Paul Lockhart, ujmując matematykę jako sztukę, mówi, że uczniowie w procesie kształcenia powinni doświadczać różnorodnych sytuacji matematycznych, a pozbawianie ich aktywnego udziału w stawianiu problemów, możliwości dokonywania odkryć, prawa do popełniania błędów czy pomyłek na etapie formułowania hipotez to ograbianie uczniów z rzeczywistego kontaktu z matematyką (Lockhart, 2009, s. 36 i dalsze). Rozwiązując problemy matematyczne w klasach I–III, uczniowie powinni wykorzystywać wszystkie dostępne sposoby:

- a) materialny, gdy podczas pracy nad rozwiązaniem problemu wykorzystują konkretne materiały (liczmany, guziki, klocki itd.); za ich pomocą budują modele sytuacji przedstawionych w zadaniu, przeprowadzają konkretne doświadczenia na różnych obiektach czy sprawdzają swoje rozwiązania w sytuacjach praktycznych;
- b) wizualny, kiedy zadany problem przedstawiany jest w formie rysunku-schematu ułatwiającego wizualizację problemu; wykorzystywana jest tu wyobraźnia przestrzenna czy uruchamiana komunikacja graficzna;
- c) społeczny – poprzez współpracę i współdziałanie w zespole, inspirowanie się rozwiązaniami i spostrzeżeniami innych, wspólne dochodzenie do celu poprzez budowanie banku pytań, wysuwanie hipotez, formułowanie definicji oraz obserwowanie kroków podjętych przez innych na drodze do rozwiązania;
- d) werbalny, czyli wyjaśniając słownie swoje strategie, argumentując swoje stanowisko w sprawie przyjętego rozwiązania, dyskutując nad wyborem właściwego rozwiązania i sprawdzając własne przekonania w tym zakresie (Żytko, 2021).

Utworzone tak cztery płaszczyzny, krzyżując się ze sobą, budują przestrzeń, w której niezbędna staje się koncentracja nauczyciela na takim kreowaniu środowiska uczenia się uczniów, gdzie język, obraz, obiekty rzeczywiste i praca zespołowa będą przeplatającymi się warunkami pobudzającymi aktywność poznawczą uczniów. Tak otrzymujemy zgoła odmienny kształt edukacji matematycznej od tego opartego na podręczniku szkolnym i zeszytach ćwiczeń.

2.4. Dziecięce zmagania z odkrywaniem regularności matematycznych w świetle badań

Dostrzeganie regularności występujących w matematyce jest niezwykle ważne dla prawidłowego rozwijania kompetencji matematycznych, dlatego stwarzanie sytuacji, w których dzieci, badając obiekty w różnych układach, dostrzegają regularności i wzorce, jest ważne. Jak wspomniałam, odkrywanie matematyki jest dostępne dzieciom już na etapie wczesnej edukacji. Douglas Clements (2001) uznaje, że już okres przedszkolny to dobry czas, by zainteresować dzieci budowaniem i odnajdywaniem wzorców. Możemy to wykorzystać podczas zabawy klockami czy porównując obiekty w różnych układach. Zdaniem Lynna Mc Garveya (2012) dzieci we wczesnej edukacji bez trudu rozpoznają przedstawione regularności nie tylko w układach obiektów, ale również na rysunkach. Często wykorzystują je, aby przewidywać dalszy ciąg kolekcji lub układ kolejnych elementów. Lesley Lee (1996) twierdzi, że umiejętność dostrzegania regularności jest niezbędna w myśleniu algebraicznym. Anthony i Jean Ortonowie dowiedli, że sama zdolność do konstruowania wzorów pojawia się znacznie wcześniej niż umiejętność opisywania regularności (Orton, Orton, 1999). Zatem skoro matematyka jest postrzegana jako poszukiwanie regularności, to dlaczego nie dać takiej możliwości dzieciom?

Dostrzeganiem regularności w najmłodszej grupie uczniów zajmowano się również na rodzimym gruncie. Alina Kalinowska na przykładzie zadań niestandardowych pokazuje, że dzieci mogą dostrzegać prawidłowości (regularności) i dokonywać uogólnień, formułować pierwsze reguły (Kalinowska, 2017). Uczą się przy tym różnych sposobów wykorzystywania zapisu, który po masowym wykorzystywaniu zeszytów ćwiczeń i kart pracy stał się dla uczniów dużą trudnością. Obserwując uczniów podczas pracy, można dostrzec, że prezentacja rozwiązania zadania matematycznego kojarzona jest przez nich z zapisem w czystym języku matematycznym i z zaskoczeniem reagują na możliwość opisu słowami swojej propozycji rozwiązania zadania. Uznają ją za błędną i niematematyczną. Kolejną

istotną kwestią, na którą zwraca uwagę Kalinowska, jest uruchamianie się myślenia hipotetycznego podczas odkrywania regularności oraz dostrzeganie wagi własnych domniemywań (Kalinowska, 2017). Obie znacząco wpływają na rozwój umiejętności budowania strategii rozwiązywania zadań matematycznych. Badania prowadzone przez Swobodę i Maj o dziecięcych konstrukcjach geometrycznych wskazują, że dzieci mimo napotkanych trudności cechuje potrzeba kontynuowania regularności nawet przy braku wyraźnej słownej instrukcji. Podczas odkrywania i kontynuowania regularności wspierają się intuicją, a napotkanie przez nie trudności tylko przekonuje do konieczności wplatania takich aktywności w edukacji matematycznej (Maj-Tatsis, Swoboda, 2018).

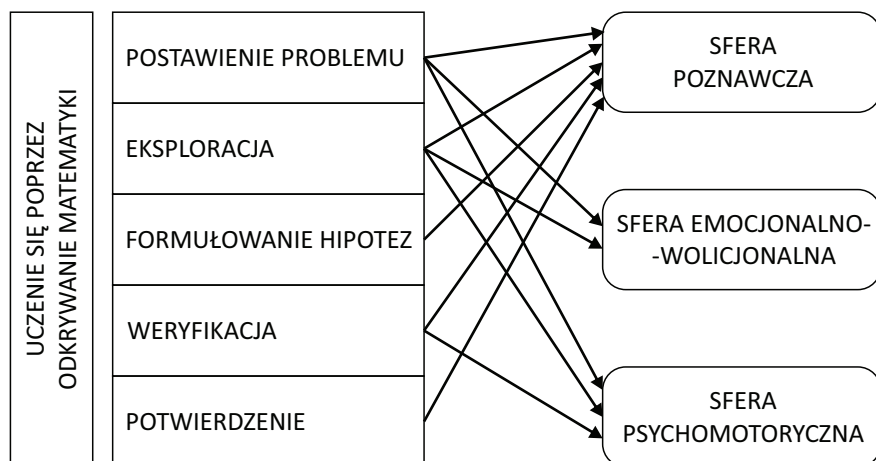
Przegląd artykułów naukowych opublikowanych po roku 2000 przeprowadzony przez Kamaluddin i Widjajanti (2019) potwierdza duże zainteresowanie uczeniem się matematyki poprzez jej odkrywanie. Analiza zawartych w nim badań empirycznych pozwoliła na konstrukcję modelu (schemat 2) prezentującego pozytywne efekty pracy tą metodą w sferze poznawczej, sferze emocjonalno-wolitionalnej i psychomotorycznej. Dostrzeżono, że nie tylko metoda jako całość przynosi wymierne korzyści, ale także jej poszczególne etapy. Etapy te przebiegają następująco:

1. Postawienie problemu – polega na prezentacji informacji oraz problemu przez nauczyciela prowadzącego zajęcia.
2. Eksploracja – polega na gromadzeniu, przetwarzaniu i analizowaniu danych identyfikowanych w postawionym problemie.
3. Formułowanie hipotez – polega na formułowaniu przez uczniów pierwszych przypuszczeń na podstawie wcześniejszej analizy, z zastrzeżeniem, że trafność przypuszczeń w dużej mierze zależy od dokładności uczniowskich eksploracji.
4. Weryfikacja – wysunięte w poprzednim etapie hipotezy wstępne zostają teraz poddawane sprawdzaniu na podstawie różnych źródeł i dyskusji.
5. Potwierdzenie – polega na zweryfikowaniu przez nauczyciela uczniowskich wniosków, tj. zadaniem nauczyciela jest potwierdzenie prawdziwości sformułowanych przez uczniów wniosków oraz korekta błędnych przekonań tak, by uczniowie mogli wyciągnąć wnioski na temat zagadnienia, którego się nauczyli (Westwood, 2008; Moore, 2005).

Uczenie się poprzez odkrywanie matematyki, oprócz wskazanych wymiernych korzyści, które szerzej zostaną przywołane w rozdziale opisującym wady i zalety proponowanego przeze mnie rozwiązania metodycznego, umożliwia zmianę stosunku do matematyki. Zmianę, która pozwoli dostrzec w matematyce coś więcej niż tylko mechaniczne rozwiązywanie zadań. Organizując lekcje w formie badań, uzu-

pełniając właściwą narracją, budujemy całościowy obraz matematyki. Ukazujemy, jak została skonstruowana i na jakie potrzeby cywilizacyjne odpowiada. To ważny aspekt, który w podejściu tradycyjnym do uczenia się i nauczania matematyki zdaje się być pomijany. Nie trzeba nikogo długo przekonywać, że matematyka to nie tylko narzędzie, to również sposób postrzegania obserwowanych w świecie związków i zależności. Łączenie jej w szkolnym procesie kształcenia z koniecznością podejmowania wysiłku intelektualnego skupionego na odkrywaniu kolejnych jej treści pozwoli na usamodzielnianie się w procesie jej poznawania, a uczenie się uczyni aktywnym oraz sensownym. Co więcej, uczenie się matematyki przez odkrywanie ma zdolność do zmiany uczniowskich postaw i wartości w stosunku do matematyki oraz siebie jako osoby podejmującej się rozwiązania problemu (Svinicki, 1998).

Schemat 2: Model pozytywnych efektów pracy metodą uczenia się poprzez odkrywanie matematyki



Źródło: opracowanie własne na podstawie Kamaluddin, Widjajanti, 2019.

Mimo że sednem uczenia się poprzez odkrywanie jest odnalezienie przez uczniów własnej wiedzy, to pozostawienie ich bez nauczycielskiego wsparcia byłoby wielkim błędem, szczególnie we wczesnej edukacji (Mayer, 2004; Abrahamson, Kapur, 2018). To zadaniem nauczyciela jest wyznaczenie ścieżki, po której uczniowie będą zmierzać do subiektywnie nowych odkryć matematycznych, a konstruowanie takich zajęć jest niełatwym zadaniem, stąd też pojawił się pomysł, aby przybliżyć metodę nauczania skierowanego na odkrywanie matematyki na pierwszym etapie edukacyjnym.

3. Nauczanie skierowane na odkrywanie matematyki

Natura dojrzałości psychicznej do uczenia się matematyki jest taka, iż nie można jej ukształtować u dzieci ani przez pokazywanie i powtarzanie wzorów zachowania, ani przez wyjaśnianie. To, co składa się na taką dojrzałość, dziecko musi samodzielnie zdobyć, odkryć i wypróbować (Gruszczyk-Kolczyńska, 1989, s. 112)

W praktyce edukacyjnej matematykę na poziomie wczesnej edukacji często traktuje się jako etap przygotowujący ucznia do uczenia się tego przedmiotu, podkreślając jednocześnie jej propedeutyczny charakter (Semadeni, 1981). Dzieje się tak dlatego, że możliwości poznawcze dziecka daleko odbiegają od specyficznych cech matematyki i wymagań, które są ich konsekwencją. Trudno przecież oczekiwać od dziecka, aby ograniczało się do prowadzenia rozumowań na pojęciach abstrakcyjnych w oderwaniu od materiału empirycznego. Przekonanie o konieczności wykorzystania możliwości rozwojowych uczniów i stale towarzyszącej im potrzeby zaspokajania naturalnej ciekawości poznawczej skłoniło mnie, aby zwrócić się w kierunku nauczania matematyki poprzez odkrywanie. Poprowadzenie uczniów drogą odkrywania nowej wiedzy niewątpliwie ułatwia i pogłębia rozumienie matematyki. Sprawdza się również w sytuacjach, w których zawodzi pamięć (Westwood, 2008). To właśnie po doświadczeniach z odkrywaniem matematyki uczniowie, stojąc przed koniecznością rozwiązania zadania, nie ograniczają się do poszukiwania w pamięci gotowych algorytmów. Zadziwiającym efektem, dla którego twierdzę, że nauczanie skierowane na odkrywanie matematyki jest dobrym sposobem zgłębiania wiedzy, jest wzrost uczniowskich przekonań, że mogą rozwiązać zadanie i znacznie częściej podejmują to wyzwa-

nie (Svinicki, 1998). To właśnie obawa przed porażką wyraźnie redukuje się po doświadczeniach z odkrywaniem matematyki. Jednocześnie doświadczanie matematyki czyni ją bardziej interesującą, otwiera uczniów na zdobywanie wiedzy, daje im poczucie sprawstwa, a przede wszystkim usamodzielnia intelektualnie (Liljedahl, 2005). G. Polya podkreślał: „Nauczanie matematyki powinno zapoznawać uczniów ze wszystkimi aspektami aktywności matematycznej tak dalece, jak to jest możliwe. W szczególności powinni oni otrzymać możliwość samodzielnej pracy twórczej – na miarę ich możliwości” (Polya, 1975, s. 335). Są to ważne cechy uczenia się matematyki poprzez odkrywanie, bo przecież lęk jest jednym z predyktorów trudności matematycznych uczniów (Cipora, 2015).

3.1. Teoretyczne podstawy nauczania skierowanego na odkrywanie

Bardzo ważne w nauczaniu matematyki są wszystkie te metody, które umożliwiają uczniom usamodzielnione zdobywanie wiedzy i kształtują umiejętność posługiwania się nią. Do metod, które silnie wspierają rozwój uczniów w zakresie matematyki, należą metody problemowe. To właśnie umiejętność rozwiązywania problemów Henryk Moroz wskazuje jako warunek konieczny przyszłych sukcesów matematycznych uczniów (Moroz, 1991). Nauczanie skierowane na odkrywanie wpisuje się w kategorię metod nauczania problemowego i również polega na kierowaniu procesem rozwiązywania przez uczniów zagadnień praktycznych i teoretycznych przy udziale ich własnej aktywności badawczej (Okoń, 1995, s. 201). Punktem wyjścia w pracy tej metody jest sformułowanie problemu, którego celem jest sprowokowanie podejmowania świadomego wysiłku myślowego uczniów (Mróz, 1978). Problemem może być pewna niewiadoma, zrodzone w trakcie lekcji lub przygotowane przez nauczyciela pytanie kryjące nierozstrzygniętą dotychczas kwestię matematyczną czy luka, którą uczniowie muszą zapisać. Można go również sformułować w postaci zadania, dla którego trzeba poszukać metody rozwiązania, bo jest nietypowe i uczniowie wcześniej się z nim nie spotkali. W przypadku nauczania poprzez odkrywanie problemem będzie sytuacja zadaniowa lub zadanie, którego rozwiązanie prowadzi do sformułowania subiektywnie nowej dla uczniów wiedzy matematycznej. Jednak bardziej skłaniam się do tego, aby proponowana metoda wykorzystywała specjalnie przygotowane sytuacje problemowe.

Według Wincentego Okonia sytuacja problemowa jest celowo skonstruowaną sytuacją dydaktyczną, w której uczniowie spotykają się z nowym, nie-

typowym układem konkretnych lub abstrakcyjnych elementów, wskazującym na nierozważane dotychczas związki między nimi (Okoń, 2001, s. 379). Uczeń, który mimo wcześniejszych doświadczeń i zgromadzonej dotychczas wiedzy znajdzie się w takiej sytuacji, odczuwa brak możliwości skorzystania z gotowego rozwiązania oraz potrzebę uzupełnienia luki. Oczywiście, aby zaproponowana sytuacja problemowa wywołała pożądane reakcje, należy zadbać, aby stosunkowo łatwo absorbowała uwagę uczniów, odwoływała się do ich dotychczasowych doświadczeń oraz celowała w ich obszar zainteresowań (Cackowska, 1993, s. 11). Określona w sytuacji problemowej trudność nie powinna wykraczać poza strefę najbliższego rozwoju uczniów w rozumieniu Wygotskiego, ale powinna skłaniać uczniów do formułowania hipotez i poszukiwania rozwiązań. Ważnym aspektem sytuacji problemowej jest to, że uczeń ma możliwość łączenia elementów wiedzy nabytej z nową, dla niego jeszcze nieznaną (Więckowski, 1972, s. 26). Owo łączenie odbywa się dzięki poszukiwaniu związków i zależności występujących między elementami wiadomymi i niewiadomymi oraz dzięki uczniowskiej aktywności o charakterze produktywnym, czego efektem jest samodzielne wytwarzanie informacji (Adamek, 2000, s. 62). Irena Adamek podkreśla, że każda nowa dla dziecka sytuacja może być polem, na którym warto stawiać wyzwania, bo jest ona stymulatorem wyzwalaającym ich twórczą aktywność (1996, s. 84).

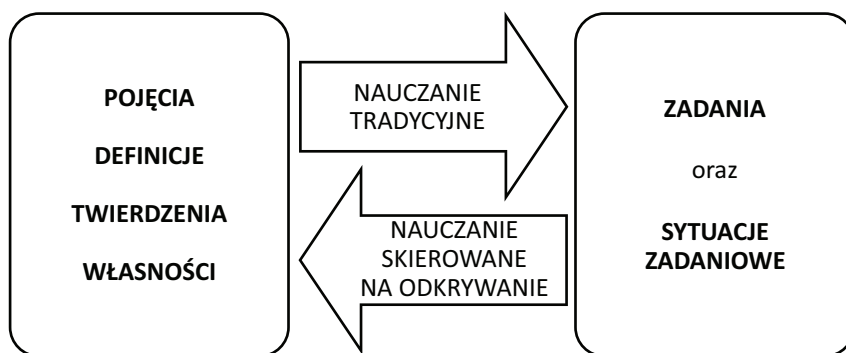
Celem wszelkiej aktywności podejmowanej na drodze rozwiązywania problemów (nie tylko przez uczniów) jest przekształcenie ich w sytuacje bezproblemowe. Tak też jest w przypadku nauczania skierowanego na odkrywanie, gdzie nowo dostrzeżone związki i zależności między obiektami matematycznymi czy formułowane reguły bądź prawa uzbrajają ucznia w narzędzia użyteczne podczas rozwiązywania kolejnych zadań, czyli nowych napotkanych problemów oraz odkrywania napotkanych „tajemnic matematycznych”. Sam proces rozwiązywania problemów charakteryzuje się pewną etapowością. Józef Galant wskazuje na sześć etapów, tj. tworzenie sytuacji problemowej, formułowanie problemu, analiza sformułowanego problemu, gromadzenie pomysłów na rozwiązanie problemu, weryfikacja pomysłów i podjęcie decyzji co do wyboru rozwiązania oraz systematyzacja nowej wiedzy i jej zastosowanie (Galant, 1987, s. 94). Etapowość postępowania podczas rozwiązywania problemów jest obecna w wielu propozycjach (Bereźnicki, 2004; Jąder, 2009; Kujawiński, 2010; Mróz, 1978; Okoń, 1987; Pisarski, 2017; Strykowski i in., 2003;). Wszystkie one są zgodne z tym, że rozwiązujący problem muszą uświadomić sobie jego istotę, tj. zdać sobie sprawę, na czym on dokładnie polega. Na tej podstawie zastanowić się nad

możliwymi rozwiązaniami, wybrać najwłaściwsze i je przeprowadzić, a następnie dokonać refleksji nad uzyskanymi wynikami. Refleksja ma nie tylko ograniczać się do sprawdzenia poprawności wyniku z warunkami postawionymi na początku, ale również obejmować obszar możliwych zastosowań i ocenę użyteczności. Tak też jest w przypadku metody nauczania skierowanego na odkrywanie, kiedy uczniowie na początku wprowadzani są w sytuację problemową, wspólnie gromadzą informacje na temat tego, co już wiedzą w danym obszarze poszukiwań, pracują zespołowo nad rozwiązaniem zagadnienia, dzielą się swoimi spostrzeżeniami, formułują nową wiedzę, po czym sprawdzają, jak mogą wykorzystać to, co właśnie odkryli. Do szczegółowego opisu etapów pracy uczniów wrócimy w podrozdziale prezentującym konstrukcję lekcji w nauczaniu skierowanym na odkrywanie matematyki.

Podjmując się próby zdefiniowania nauczania skierowanego na odkrywanie w kształceniu matematycznym, przyjmuję, że jest to stałe postępowanie dydaktyczne, w którym aktywność własna dziecka prowadzi je w trakcie rozwiązywania problemów teoretycznych lub praktycznych do odkrycia subiektywnie nowej wiedzy matematycznej, czyli dotąd nieznanych mu własności, praw, reguł i pojęć matematycznych. Głównym zadaniem nauczyciela pracującego tą metodą jest taka organizacja lekcji, która wiedzie dziecko od tego, co już wie, do nowych treści matematycznych. W przeciwieństwie do podejścia tradycyjnego nie rozpoczynamy lekcji od nauczycielskiego wprowadzenia kolejnej porcji wiedzy w formie definicji, własności czy reguły, lecz od zapoznania uczniów z sytuacją problemową, po uporaniu się z którą to oni sami ją sformułują. Postawione wyzwanie ma na celu wywołanie konfliktu poznawczego, który prowokuje do rozpatrywania obiektów w nowych układach opisanych za pomocą innych relacji czy ujawniających inne niedostrzegane dotąd własności. To właśnie wtedy dochodzi do konieczności spojrzenia na wiedzę matematyczną w nowym ujęciu, w nowych kontekstach. Spostrzeżenia dzieci są przez nie same porządkowane i prezentowane. W tym podejściu do nauczania nowe treści, mimo ich stałej obecności podczas zajęć, wybrzmiewają na końcu i są zwieńczeniem wysiłków intelektualnych uczniów. Zaprezentowany schemat (schemat 3) w uproszczeniu prezentuje główną różnicę między nauczaniem tradycyjnym a nauczaniem skierowanym na odkrywanie matematyki. Strzałki na schemacie pokazują kierunek działań podejmowanych podczas lekcji, a ich przeciwne zwroty wskazują na odwrócenie kolejności wykonywanych czynności. Odnoszą się również do ról, które przypisujemy uczniom i nauczycielowi, bo rozpoczynając lekcję od teorii matematycznych,

nauczyciela czynimy osobą wiodącą i dominującą. Osobą, której zadaniem jest kontrolowanie jakości wykorzystywania nowej wiedzy do rozwiązywania zadań. I tak jak ma to miejsce w tradycyjnym podejściu do nauczania, nauczyciel jest źródłem wszelkiego poznania. Natomiast z odmienną sytuacją spotykamy się podczas odkrywania. W tym wypadku to uczeń jest swoim źródłem wiedzy, a dokładniej – wyniki jego aktywności poznawczej.

Schemat 3. Nauczanie tradycyjne *versus* nauczanie skierowane na odkrywanie



Źródło: opracowanie własne.

Oczywiście nietrudno dostrzec, że w edukacji matematycznej nie możemy koncentrować się jedynie na odkrywaniu regularności matematycznych. Właściwym miejscem nauczania skierowanego na odkrywanie będą wszystkie te sytuacje, w których zamierzamy zapoznać uczniów z nową dla nich wiedzą. Konieczność przeprowadzania lekcji pogłębiających rozumienie pojęć, doskonalących umiejętności posługiwania się nimi czy kształtujących sprawność rachunkową uznaję za równie ważne, bo jakich efektów moglibyśmy oczekiwać, gdybyśmy skoncentrowali się tylko na odkrywaniu matematyki? Michał Szurek pyta: Co zrobić z wiedzą, którą rozumiemy, a którą nie posługujemy się sprawnie? Przecież „od rozumieć do potrafić może być bardzo daleko” (Szurek, 2005, s. 20), a nam zależy na „potrafić” przy pełnym rozumieniu. Niemniej jednak niewłaściwe w procesie kształcenia konstruowanym w podejściu konstruktywistycznym jest rozdzielanie rozumienia pojęcia od umiejętności jego wykorzystywania. Dlatego właśnie warunkiem koniecznym wielokontekstowego rozumienia pojęć jest ich wielokontekstowe używanie, które nie tylko umożliwia ich poznanie, ale przede wszystkim ujawnia, w jaki sposób uczniowie je znają. Nauczanie skierowane na

odkrywanie wiedzy matematycznej umożliwia wielokontekstowe kształcenie, w toku którego uczniowie mają sposobność badać obiekty matematyczne w różnych sytuacjach, co jest istotne dla rozwoju kompetencji matematycznych.

3.2. O konstrukcji lekcji w nauczaniu skierowanym na odkrywanie

Konstrukcja lekcji jest bardzo zbliżona do etapów rozwiązywania problemów, o których pisałam w poprzednim rozdziale. Zanim jednak przejdę do charakterystyki poszczególnych części lekcji, warto zatrzymać się na jednym z kluczowych elementów, czyli określeniu, co właściwie uczniowie mają odkryć w trakcie lekcji. Oczywiście tematów takich zajęć doszukamy się chociażby w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla pierwszego etapu edukacyjnego⁷. To tam w formie wymagań szczegółowych określono zakres treści matematycznych przeznaczonych do realizacji. Rozważmy dla przykładu jeden z zapisów wymienionego dokumentu.

Wśród osiągnięć z zakresu posługiwania się liczbami wskazano: „Uczeń wyjaśnia istotę działań matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz związki między nimi; korzysta intuicyjnie z własności działań”⁸. Aby wybrać temat pracy dla uczniów na podstawie przywołanego zapisu, należy się zastanowić, co kryje zwrot „istota działań arytmetycznych”, jakie związki zachodzą pomiędzy wymienionymi działaniami arytmetycznymi oraz jakie własności posiada każde z nich. Po takiej analizie nietrudno wybrać zagadnienie, które można przygotować na zajęcia, np. *Czy istnieje liczba, przez którą nie wolno dzielić?* albo *Czy liczby możemy mnożyć w dowolnej kolejności?* Zarówno w pierwszej, jak i w drugiej propozycji formułowane pytanie określa to, co już uczniowie wiedzą oraz czego mają się dowiedzieć. Podczas poszukiwania odpowiedzi na pierwsze pytanie uczniowie już znają dzielenie i potrafią wyznaczać ilorazy dwóch liczb. Ponadto wiedzą, że działaniem odwrotnym do dzielenia jest mnożenie oraz że poprawność wykonanego dzielenia sprawdzamy za pomocą mnożenia. Niewiadomą w tak postawionym pytaniu będzie możliwość dzielenia przez zero.

⁷ Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. z 24 lutego 2017 r., poz. 356).

⁸ Tamże, załącznik nr 2, s. 37.

Analizując drugie pytanie, dostrzegamy, że uczniowie potrafią mnożyć liczby naturalne, ale muszą odkryć, że mnożenie jest przemienne i łączne. Oczywiście nie ma konieczności nazywania tych własności, ale intuicyjne uzasadnienie możliwości przedstawiania liczb w iloczynie i wymnażania ich w dowolnej kolejności ułatwia obliczenia.

Innym źródłem inspiracji jest wybrany przez nauczyciela do realizacji podręcznik szkolny. Na jego stronach odnajdziemy treści matematyczne, które zazwyczaj opracowane są w formie zadań lub wyeksponowane w specjalną ramką. Zamieszczone poniżej dwa zadania dotyczące przemienności dodawania przekształcamy w lekcję, na której w wyniku własnej aktywności dzieci odkryją, że dodawanie jest przemienne. Warto tutaj zaznaczyć, że trud przekształcania i organizowania zajęć w formie uczniowskich badań matematycznych bardzo szybko przełoży się na uczniowskie postrzeganie matematyki, angażowanie się w pracę, samodzielność intelektualną, poziom rozumienia treści matematycznych, a także trwałość, na której nam bardzo zależy.

Przykład

3. Zmierz pary linii jednakowego koloru i oblicz łączną długość każdej z tych par.

17

Dodawanie jest przemienne!

Nawet jeśli składniki miejscami zamienisz, to ich suma się nie zmieni.
 $9 + 2 = 2 + 9 = 11$

4. Wskaż, bez liczenia, która suma w każdej parze jest większa, a potem oblicz i sprawdź swoje rozwiązanie.

$9 + 3$ czy $3 + 9$ $4 + 8$ czy $8 + 4$ $7 + 6$ czy $6 + 7$

• Uzasadnij swoją odpowiedź, wymieniając nazwę własności dodawania.

przemienność dodawania

Źródło: Podręcznik dla klasy 2, cz. 1: *Ja i moja szkoła na nowo*, Wydawnictwo JUKA-91, Warszawa 2018, s. 17.

Po wyborze zagadnienia matematycznego, które chcemy zaproponować naszym uczniom, należy zastanowić się nad konstrukcją sytuacji problemowej, czyli dokonać wyboru zadań, poleceń, zaplanować doświadczenia, przygotować

niezbędne pomoce dydaktyczne, które będą prowadziły do odpowiedzi na postawione pytania i wyjaśniały uczniowskie wątpliwości. Ważną zasadą, której należy przestrzegać, jest konieczność uwzględniania możliwości poznawczych dziecka i jego potrzeb edukacyjnych. Wszystkie nasze propozycje powinny być możliwie bliskie doświadczeniom dzieci, uwzględniać psychologiczny proces interioryzacji oraz realizować podejście indukcyjne do procesu kształcenia, w którym tworzymy przestrzeń na eksperymenty i obserwacje uczniów. W tym ujęciu podążamy drogą od konkretnego przypadku do ogólnej idei, od konkretnego zastosowania do ogólnej teorii, a tym samym do budowania prawa naukowego. Tu najważniejszym aspektem pracy dziecka staje się konstruowanie własnej wiedzy pod kierunkiem nauczyciela (Rocard i in., 2007).

Proponowany tok lekcji obejmuje sześć kroków i jest zbieżny z etapami uczenia się poprzez odkrywanie zaprezentowanymi w poprzednim rozdziale. Ważnym elementem konstruowanego rozwiązania metodycznego jest kolejność występowania poszczególnych kroków oraz konieczność zaistnienia każdego z nich. Charakteryzują się one innym czasem trwania i mają do spełnienia inną rolę. Nazwy, które proponuję poniżej, nie są w żaden sposób wiążące, natomiast istotne dla całego postępowania jest to, że stanowią drogowskazy porządkujące czynności prowadzące uczniów do odkrycia nowej wiedzy matematycznej.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Celem początkowego etapu lekcji jest skierowanie uwagi uczniów na zaplanowane do realizacji zagadnienie. Zaczynamy od rozmowy z dziećmi na wybrany temat, oddając im jednocześnie pole do dzielenia się swoimi wiadomościami z danego zakresu. Jest to ta część lekcji, w której zbieramy informacje na temat dotychczasowych doświadczeń uczniów czy zgromadzonych przez nich informacji. Ten etap stanowi ważny początek lekcji z dwóch powodów. Pierwszy to często niewykorzystywana przez nauczycieli sposobność do oceny uczniowskich zasobów na wejściu, drugi istotny jest dla rozwoju poznawczego dziecka – to przywołanie dotychczas istniejących struktur umysłowych rozważanego zagadnienia. Przypominając i porządkując wszystko, co zostało dotychczas zgromadzone na dany temat, pozwalamy po pierwsze zorientować się nauczycielom, od którego miejsca zaczynają, a po drugie ma również związek z Piagetowskim równoważeniem struktur poznawczych, które postrzegane jest jako rozwój intelektualny jednostki. Odkrywając nową wiedzę matematyczną, a taki

cel przyjęliśmy, wskazujemy, jak możemy połączyć ją ze „starą”, rozbudowując lub reorganizując wszystko, co wiedzieliśmy dotychczas.

Pytania kierowane do uczniów powinny przekonywać, że nauczyciel jest zainteresowany zakresem ich wiedzy, ich przemyśleniami związanymi ze sposobami porządkowania i łączenia zagadnienia z innymi elementami wiedzy oraz ich przeświadczeniami o jej użyteczności. To w tej części lekcji jest miejsce na pytania: *Skąd to wiecie? Po czym rozpoznajecie? Jak myślicie, z czego to wynika? Gdzie się z tym spotkaliście? Jak myślicie, po co wymyślono np. figury geometryczne?* i wiele innych. Kierowane do klasy pytania mają przede wszystkim umożliwić dzieciom spontaniczne dzielenie się wiedzą bez z góry narzuconej formy wypowiedzi. Mają podkreślać, że to, czego nauczyli się do tej pory, jest naprawdę ważne. Swobodne odpowiedzi na pytania niejednokrotnie zawierają błędy i zdarza się, że nie mają związku z zaplanowanym tematem zajęć. Jednak nie korygujemy i nie wyjaśniamy uczniowskich wątpliwości. Budujemy atmosferę tajemnicy, zagadki do odkrycia, bo to ona jak nic innego potrafi koncentrować uczniów na poszukiwaniu odpowiedzi. Proponuję, aby formą organizacją pracy w tej części lekcji była praca z całą klasą, bowiem jest to moment na określenie przestrzeni wspólnych poszukiwań. Oczywiście luźną rozmowę wprowadzającą uczniów w tematykę lekcji możemy zastąpić zagadką czy grą dydaktyczną. Najważniejsze jest, aby skupić uwagę uczniów na treści lekcji i przybliżyć obszar, którym będziemy się zajmować.

Drugi etap – Widzę sens

Ten etap jest związany z poprzednim, bo to właśnie wprowadzenie poprzez tajemnicę czy interesującą zagadkę do rozwiązania nadaje sens poszukiwaniom, ukazuje potrzebę poszerzania wiedzy i niejednokrotnie jej użyteczności. Celowość podejmowanych działań zwiększa motywację i zaangażowanie w to, co dzieje się podczas lekcji. Ponadto jest zgodna z rosnącą potrzebą „widzenia sensu” przez dzieci w tym, co robią i dokąd prowadzą podejmowane przez nich działania. Proponuję, aby w tym miejscu skorzystać z pytań kluczowych, które nie tylko ukazują szerszy kontekst rozważanego problemu, ale także angażują uczniów w poszukiwanie odpowiedzi. Ukazanie celu lekcji w formie pytań, np.: *Jak myślicie, czy krzesło zmieści się na kartce papieru? Co będzie miało większy obwód kwadrat czy prostokąt, jeśli wiemy, że zbudowano je z tej samej ilości identycznych kwadratów? Po co ludzie wykorzystują różne jednostki długości? Po co nam linijka? Czy z tego,*

że coś jest większe, wynika, że jest cięższe?, wzbudza zainteresowanie i kieruje uwagę uczniów na rozwiązanie problemu. Zadaniem tego krótkiego etapu lekcji jest zmotywowanie uczniów do działania i skoncentrowanie na temacie zajęć.

Trzeci etap – Popróbuje i zobaczę, jak to działa

Ta część lekcji trwa najdłużej i jest organizowana w formie doświadczeń czy też eksperymentów uzupełnionych ukierunkowaną na osiągnięcie celu obserwacją. Uczniowie prowadzą zatem szkolne badania matematyczne. Część ta jest niezwykle istotna, ponieważ stanowi podstawę do formułowania przyszłych wniosków. Konieczne jest, aby uczniowie w tej części lekcji pracowali w grupach i wspólnie analizowali, planowali rozwiązania oraz dokonywali wyboru jednego z nich, a także budowali pierwsze wnioski na podstawie uzyskanych wyników. Jest to czas, w którym uczniowie mogą podawać w wątpliwość dotychczas stosowane sposoby i uzyskane dzięki nim wyniki, rozpatrywać rozwiązania w różnych układach czy wspólnie weryfikować swoje pomysły. To w tym etapie początkowo kierują się intuicją, by następnie przejść do rozumowania indukcyjnego.

Jest to również ten etap lekcji, w którym dzieci najczęściej napotykają przeszkody utrudniające im kontynuację pracy, tzw. bycie w kropce lub martwym punkcie. Takiej sytuacji w żaden sposób nie należy rozważać w kategoriach porażki uczniów czy nauczyciela. Trudności przy tak wymagającej formie aktywności uczniów, jaką jest dostrzeganie regularności czy odkrywanie praw i własności, zdają się być oczywiste. W takiej sytuacji nauczyciel musi zadbać, aby uczniowie nie pozostawili zadania bez rozwiązania i w dalszym ciągu wytrwale go poszukiwali. Oczywiście największym błędem, który może popełnić nauczyciel w takiej sytuacji, jest odpowiedź, co uczniowie mają zrobić dalej. Pamiętajmy, że nawet częściowe rozwiązanie zadania przez nauczyciela odbiera uczniom satysfakcję z samodzielnego odkrycia. Warto zatem zachęcać uczniów, aby jeszcze raz przeanalizowali drogę, która doprowadziła ich do momentu „bycia w kropce”. Ważne jest, aby w takiej sytuacji nauczyciel nie spieszył z pomocą niosącą gotowe rozwiązanie. Jego odpowiedzi mają sugerować rozważenie innych możliwości. Ten etap pracy na lekcji jest szczególnie wymagający zarówno dla uczniów, jak i dla nauczyciela. Kalinowska podaje, że aby umożliwić uczniom wczesnej edukacji realizację badań matematycznych, należy spełnić dwa warunki. Pierwszy odnosi się do przygotowania klasopracowni, czyli zaprojektowania miejsca, w którym uczniowie będą przeprowadzali badania. Obejmuje on m.in. przygotowanie

miejsce pracy oraz dostarczenie niezbędnych pomocy dydaktycznych, wśród których powinny się znaleźć:

- te, z którymi dziecko spotkało się w życiu codziennym (np. guziki, kasztany, fasolki, nakrętki),
- ustrukturyzowane pomoce dydaktyczne (np. kolorowe liczby, geoplany, klocki Dienes, plansze liczbowe, modele brył, tangram)
- przedmioty niezbędne do doświadczeń związanych z pomiarem (np. sznurki, tasiemki, różnej pojemności naczynia, odważniki),
- materiały samodzielnie przygotowane podczas innych zajęć (np. liczydła sznurkowe, gry planszowe, dywaniki liczbowe, waga, model kąta prostego),
- przybory szkolne (np. linijka, nożyczki, ekierka, klej, plastelina, kredki, mazaki, farby, pędzle).

Drugi warunek odnosi się do postawy nauczyciela i jego umiejętności w zakresie stawiania pytań, podtrzymywania zaangażowania czy budowania atmosfery badawczej. Postawa, o której mówi Kalinowska, jest zgoła odmienna od tej, z którą możemy się spotkać na lekcji realizowanej w podejściu tradycyjnym, kiedy uczniowie muszą uważnie słuchać i wypełniać kolejne polecenia. Tu nauczyciel musi być gotowy na początkowy bałagan na lekcji, gdy uczniowie przygotowują się do pracy w grupach i organizują się, przypisując sobie role, zapoznając z pomocami dydaktycznymi czy wymieniając pierwszymi próbami rozwiązania problemu. Ten moment jest „głośny”, bo towarzyszą mu silne emocje i dostrzegalne w całej klasie pełne zaangażowanie. Wskazywane trudności organizacyjne, które muszą pokonać uczniowie, stają się dla nich z czasem zwykłymi zadaniami organizacyjnymi. Jednak dopóki się tego nie nauczą, musimy liczyć się z pozornym chaosem.

Kolejną zmianą w zakresie nauczycielskich postaw jest akceptacja uczniowskich nieudanych prób i pomyłek, które w zupełnie naturalny sposób pojawiają się podczas odkrywania. Ważne jest, aby nauczyciel akceptował uczniowskie pomysły i był na nie gotowy nawet wówczas, gdyby dotyczyły innego niż sformułowany przez niego problem. Takie pomysły podczas lekcji pojawiają się spontanicznie i nie należy ich traktować jako celową uczniowską dezorganizację pracy. Ma to raczej związek z nieograniczoną dziecięcą ciekawością poznawczą. Wyrażenie zgody na dyskusje o prowadzonych doświadczeniach czy akceptacja nieosiągnięcia przez niektórych uczniów przyjętego na początku lekcji celu nie powinna zniechęcać nauczyciela do pracy tą metodą. Uczestnictwo w procesie odkrywania i poszukiwanie rozwiązań jest istotniejsze poznawczo niż samo otrzymanie wyniku (Kalinowska, 2016).

Ten etap lekcji zazwyczaj zajmuje najwięcej czasu i oceniam go jako zdecydowanie najtrudniejsze wyzwanie dydaktyczne, któremu musi sprostać nauczyciel już na etapie planowania. Aby właściwie skonstruować taką lekcję, nauczyciel powinien sam podjąć trud rozwiązania problemu, który zamierza postawić w klasie. Pozwoli mu to na określenie miejsc, w których mogą wystąpić trudności i na namysł nad wartościowymi sposobami reakcji. Pamiętając o tym, że jest inicjatorem procesu badawczego, musi planować swoje działania tak, aby umożliwić uczniom samodzielne odkrycie, czyli wyzbyć się nawyku zbyt pośpiesznego udzielania prawidłowych odpowiedzi, stawiania pytań sugerujących odpowiedź czy wskazywania gotowych, jedynych i akceptowanych przez siebie sposobów rozwiązań problemów. Musi pamiętać, że staje się partnerem poznawczym dziecka, a nie skarbnicą gotowych odpowiedzi, z której uczeń czerpie w dowolnym momencie lekcji.

Całość prac nad rozwiązaniem kończymy wypracowanym na podstawie uzyskanych wyników wnioskiem, który zostanie zaprezentowany całej klasie. To właśnie umiejętność wnioskowania jest ważną cechą myślenia. Dzieci nawet na początku nauki szkolnej przyjmują za pewnik, że to, co usłyszą, jest prawdą, szczególnie wtedy, gdy autorem słów jest osoba dorosła. Jednak stopniowe wyodrębnianie się własnych myśli na podstawie analizy i syntezy powoduje, że dzieci zaczynają zastanawiać się nad prawdziwością usłyszanych wypowiedzi i konfrontują je z tym, co same zaobserwowały, czy z własnymi przekonaniem o przedmiocie lub zjawisku. Rozwój zdolności wnioskowania na podstawie aktywności własnej dziecka i rosnąca potrzeba uzyskania uzasadnienia nie tylko wzmacniają ciekawość poznawczą dziecka o otaczającej go rzeczywistości, ale wywołują także pierwsze próby dowodzenia prawdziwości poznawanych faktów.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

W tej części lekcji grupy na forum klasy prezentują swoje wyniki. Przedstawione rezultaty zawsze muszą być poparte komentarzem, który uzasadnia przyjęte rozwiązanie. W tej części lekcji zwracamy szczególną uwagę na rangę pytanie: *Dlaczego tak jest?* Konieczność uzasadniania własnego stanowiska pozwala na wyeliminowanie tzw. pochoptności myślowej ucznia. Zjawisko to ujawnia się podczas lekcji najczęściej w dwóch sytuacjach. Z pierwszą mamy do czynienia, gdy dziecko szybko, bez zastanowienia czy próby rozwiązania zadania, podaje odpowiedź (tzw. strzelanie). Tłumaczyć możemy to dziecięcą potrzebą dostrzeżenia i wyróżnienia się w grupie rówieśników czy chęcią szybkiej finalizacji obowiązku

rozwiązania zadania bez dbałości o poprawność odpowiedzi, która zdaje się nie mieć dla dziecka w tym momencie żadnego znaczenia. Druga odnosi się do ostatnich doświadczeń dziecka, w odniesieniu do których udziela ono odpowiedzi. Gdy uczniowskie odpowiedzi okazują się niepoprawne, dziecko staje bezradne i zawiedzione w obliczu faktu, że to nie działa. Rozmowa nad rozwiązaniem ma wspierać dzieci, aby z rozwagą udzielały odpowiedzi.

Zadaniem nauczyciela w tej części zajęć jest zebranie wszystkich dziecięcych odkryć i wyeksponowanie ich np. poprzez zapisanie na tablicy czy w formie plakatów wykonanych przez nich w grupach. Ograniczamy się tylko do przyjęcia rozwiązania, przygotowując uczniów do kolejnej ważnej części lekcji, czyli wspólnej dyskusji nad rozwiązaniem. Uczniowie po zapoznaniu się z rezultatami wszystkich grup mają je przeanalizować i ponownie omówić w zespołach, w których pracowali do tej pory. Dyskusja ma dotyczyć nie tylko uzyskanych rezultatów, ale obejmować również wątpliwości co do zaprezentowanych rozwiązań i trudności pojawiających się na drodze do odkrycia.

Głównym celem tej części lekcji jest zwrócenie uwagi uczniów na potrzebę namysłu i rozważnego określania własnego stanowiska w stosunku do prezentowanych spostrzeżeń i przyjętych przez innych rozwiązań. Wiąże się to z koniecznością dokonania wyboru jednej spośród zaprezentowanych na lekcji propozycji i uczy dociekliwości, radzenia sobie z informacją, podejmowania decyzji, budowania argumentacji na poparcie własnego stanowiska czy wartościowania własnych rozstrzygnięć. Wskazane umiejętności są niezwykle istotne, szczególnie wtedy, gdy zależy nam na kształtowaniu postaw badawczych w grupie najmłodszych uczniów. Dla nauczyciela obserwującego zmagania uczniów jest to doskonała okazja do poszerzania swoich kompetencji w zakresie uczniowskich sposobów prowadzenia rozumowania oraz określenia poziomu rozumienia ukształtowanych dotychczas pojęć matematycznych.

Piąty etap – Odkryłem nieznana mi dotąd matematykę

Po dyskusji i wymianie uwag na forum klasy uczniowie wspólnie formułują wniosek z badań i budują własną definicję pojęcia lub odkrytej właśnie regularności matematycznej. Na tym etapie ważne jest, aby było to wspólne stanowisko wszystkich uczniów, z tym że to nie nauczyciel ma przekonać uczniów do słuszności wybranego rozwiązania. Cały sekret kryje się w prowadzonej dyskusji. Nauczyciel przysłuchuje się, porządkuje rozmowę, udzielając głosu kolejnym

uczniom, ale nie wolno mu oceniać w kategoriach „dobra–zła” odpowiedź. Jednym z narzędzi, które wspiera trudną rolę nauczyciela, jest opisywany w poprzednim rozdziale kontrprzykład. To właśnie za jego pomocą korygujemy uczniowskie wnioski. Zazwyczaj w przypadku błędnych odpowiedzi podajemy przykład, dla którego uczniowskie spostrzeżenie nie jest prawdziwe. Wspólne klasowe rozważania mają prowadzić do odkrycia nowej dla uczniów wiedzy, której poprawność ma potwierdzić nauczyciel. W tym miejscu nasuwa się pytanie: *Co w sytuacji, gdy uczniowie nie uzyskają poprawnego rozwiązania?* Hipotetycznie możemy przyjąć taką sytuację. Wówczas jednak należałoby się zastanowić, co było istotą lekcji i jakie efekty uzyskaliśmy. Na tej podstawie budujemy kolejne zajęcia, które poprzez realizację innych badań matematycznych, na podstawie innych doświadczeń, tworzą przestrzeń innego spojrzenia na interesujące nas zagadnienie. Przypomnijmy za Fisherem, że matematyka traktowana jako zbiór gotowych narzędzi do opanowania wskazuje na instrumentalne podejście do edukacji matematycznej (Fisher, 1999), a nam zależy na kształceniu, które pozwoli dostrzec, że matematyka to sposób rozumowania i porządkowania otaczającej nas rzeczywistości.

Ważnym elementem tego etapu lekcji jest formułowanie rozwiązania, czyli kształtowanie umiejętności zaprezentowania wniosków swojej pracy w formie wypowiedzi lub zapisu. Zarówno w jednym, jak i w drugim przypadku nie spodziewamy się od razu, że język, w którym usłyszymy odpowiedź, będzie w całości odpowiadał temu funkcjonującemu w matematyce, a zapis wykorzystywał symbolikę, którą posługują się matematycy. Kształtowanie umiejętności wypowiadania się w dziedzinie matematyki należy do jednej z najwyższych kompetencji matematycznych i niestety kształtuje się bardzo długo. Nam zależy na tym, aby uczniowie stopniowo przechodzili od języka potocznego do formalnego, wplatając poznawane pojęcia i uwzględniając strukturę wypowiedzi matematycznej.

Ostatnim, ale równie ważnym elementem tego etapu są przekonania uczniów o użyteczności nowo odkrytej wiedzy matematycznej. Te przekonania obejmują przeświadczenie o prawdziwości wiedzy i poczucie rozumienia nowego odkrycia, za czym idą konieczność poszukiwania dla niej zastosowań i dążność do zwiększania własnych zasobów intelektualnych.

Szósty etap – Sprawdź, jak to działa w innych sytuacjach

Każde nowe odkrycie, chociażby tylko wywiedzione z uczniowskich badań i oparte na ich własnych doświadczeniach, musi znaleźć swoje zastosowanie.

Zadaniem uczniów w tej części lekcji jest wspólny namysł nad możliwościami wykorzystania nowej wiedzy. To właśnie ten etap uznaję za zwieńczenie całego procesu odkrywania. Jeśli go pomijamy, gubimy sens podejmowania wszelkiej aktywności. W edukacji wczesnoszkolnej wskazanie zastosowań matematyki nie przysparza dużych trudności i nie musimy się obawiać, że takowe się nie znajdą. Jednak chcąc być przygotowanym na każdą ewentualność, warto na etapie planowania i organizowania lekcji opracować kilka zadań lub sytuacji zadaniowych, w których uczniowie rzeczywiście znajdą zastosowanie dla własnych odkryć. Jest to również okazja do sprawdzenia, czy wszyscy uczniowie rozumieją nowe odkrycie. Warto zatem zorganizować pracę uczniów nad rozwiązaniem zadania w formie indywidualnej. Będzie to dobry moment, aby sprawdzić, które dziecko wymaga jeszcze pomocy, a które w pełni zrozumiało nową wiedzę.

Zaproponowany tok lekcji przypomina etapy postępowania badawczego i w kontekście edukacji matematycznej uczniów klas I–III szkół podstawowych może być tak traktowany. Daje uczniom możliwość samodzielnego odkrywania wiedzy „poprzez posłużenie się umysłem” (Bruner, 1978, s. 662), a to przecież jest sednem uczenia się (Mayer, 2004; Prince, Felder, 2006). Jak nietrudno dostrzec, uczniowie, podejmując próbę rozwiązania problemu, stają się twórczymi myślicielami, poszukiwaczami rozwiązań, uczestnikami dyskusji, krytykami własnych i cudzych pomysłów. To podczas takich lekcji rozmawiają o tym, co dostrzegli, co według nich przemawia za tym, a nie innym rozwiązaniem, kształtując przy tym język wypowiedzi, formę zapisu rozwiązania czy potrzebę rozważenia wszystkich możliwych przypadków rozwiązania. Uczniowską pracę na lekcji zorganizowaną w taki sposób możemy niewątpliwie określić jako pobudzającą do twórczego myślenia matematycznego. To właśnie manipulacje na obiektach rzeczywistych ujawniają lukę i pobudzają do wycucia pozornie ukrytych regularności. Ich artykulacja słowna, fizyczna, rysunkowa czy symboliczna prowadzi do formułowania uogólnień, które w dalszym ciągu mogą być weryfikowane przez manipulację, jednak na głębszym poziomie złożoności (Mason, Burton, Stacey, 2005, s. 151–154). Hasłem przewodnim lekcji realizowanych metodą nauczania skierowanego na odkrywanie matematyki możemy uczynić słowa Roberta Kaplana⁹: „Zapytaj mnie i Ja odkryję” (ang. Ask me! & I Discover).

⁹ Robert Kaplan – profesor i wykładowca Harvard University, współtwórca program „The Math Circle”.

Czytelnikowi analizującemu zaprezentowaną konstrukcję lekcji zapewne narzuca się jedna bardzo istotna uwaga dotycząca rozważanego modelu lekcji. Do tej pory na stronach niniejszego opracowania odwoływałam się do konstruktywistycznego podejścia do nauczania matematyki. Jednak, jak wiemy, postawienie samego problemu, nieważne, jak silnie angażującego ucznia w rozwiązanie, może okazać się niewystarczające. Nawet dla wprawnego badacza zagadnień matematycznych istnieją momenty, w których nie wie, co dalej. Pojawianie się tzw. martwego pola w poszukiwaniach może być związane z wieloma czynnikami. Może to być zbyt silne emocjonalne zaangażowanie, które nie pozwala na uwolnienie umysłu i spojrzenie na całość z innej perspektywy. Mogą to być również niewystarczające zasoby wiedzy badacza, trudności w budowaniu i planowaniu strategii rozwiązania, chaotyczność postępowania i wiele innych. Stąd też pomysł na opisaną powyżej konstrukcję zajęć, która – mimo że koncentruje się na aktywności własnej ucznia i czyni go odpowiedzialnym za budowanie własnych struktur umysłowych – wymaga wsparcia poprzez właściwie zaplanowaną lekcję uwzględniającą interwencję nauczyciela w trudnych dla uczniów momentach. Myślę, że zaproponowane podejście łączy w sobie uczniowskie uczenie się poprzez odkrywanie z uczeniem się opartym na instrukcjach.

Model oparty na instrukcjach łączy w sobie dwa różne podejścia do zdobywania wiedzy – poprzez transmisję oraz konstruowanie (Godino i in., 2015). Z jednej strony łączy główny cel badania, czyli rozwiązywanie problemu (Schoenfeld, 1992), elementy teorii sytuacji dydaktycznych poprzez dobieranie sytuacji problemowych mających na celu optymalizację adaptacyjnego wymiaru uczenia się i autonomii uczniów (Brousseau, 2002) z realistycznym nauczaniem matematyki, którego jedną z kluczowych zasad jest umożliwienie uczniom ponownego wynalezienia matematyki (Freudenthal, 1991). Z drugiej zaś wskazuje na interwencję nauczyciela w działania uczniów poprzez konstruowanie instrukcji i wsparcie w momentach krytycznych, a to wpisuje się w model oparty na transmisji wiedzy, bo do takiej dochodzi w przytoczonej sytuacji (Godino i in., 2015). Jest to jednak tylko element, którego zadaniem jest ukierunkowanie, nie zaś przekazanie informacji do przyswojenia, co czyni go zgoła odmiennym podejściem od tradycyjnego nauczania. Pewne kompromisy, na które jesteśmy narażeni podczas konstruowania lekcji w modelu nauczania skierowanego na odkrywanie, zdają się być niezbędne szczególnie na pierwszym etapie edukacyjnym, kiedy nieznaną drogą poszukiwania rozwiązań może zaważyć na całym przedsięwzięciu.

3.3. Możliwości edukacyjne i trudności organizacyjne nauczania skierowanego na odkrywanie

Tematyką związaną z uczeniem się poprzez odkrywanie zajmowało się wielu badaczy, a sformułowane na podstawie badań empirycznych wnioski podkreślają słuszność stosowania proponowanej metody w pracy z uczniami. To właśnie umiejętność samodzielnego dostrzegania i odkrywania regularności uznano za jedną z wiodących kompetencji matematycznych (Góralski, 2013) oraz wskazano na pomijanie jej kształtowania w praktyce edukacyjnej (Dąbrowski, 2013; Dylak, 2013; Gruszczyk-Kolczyńska, 2006; Kalinowska, 2010b; Klus-Stańska, Nowicka, 2013). Do najbardziej znaczących w kontekście wspierania rozwoju uczniów zaliczam samodzielne dochodzenie do wiedzy, możliwość analizy wielu dróg prowadzących do rozwiązania oraz kształtowanie umiejętności uczenia się uczniów. Warto podkreślić, że nauczanie skierowane na odkrywanie ma wiele cech wspólnych z obecnie funkcjonującymi koncepcjami edukacji matematycznej – przede wszystkim opiera się na wczesnych doświadczeniach matematycznych dziecka (Gruszczyk-Kolczyńska, 2008), wspiera umiejętność samodzielnego konstruowania pojęć (Klus-Stańska, 2000) oraz rozwija gotowość do inicjowania i modyfikowania różnych sposobów działania (Dixon 2005; Kapur, Toh, 2013; Mason, Burton, Stacey 2005).

Wśród zalet poznawania matematyki na drodze odkrywania możemy ponadto wyróżnić wzrost atrakcyjności zajęć szkolnych, który przełoży się na wzrost dziecięcego zaangażowania się w to, co dzieje się na lekcji (Carroll, Beman, 2015). Owe atrakcyjności doszukamy się w wykonywaniu doświadczeń, manipulowaniu obiektami, rysowaniu, wycinaniu, konstruowaniu, a także w rozmowach o pomysłach na rozwiązanie. Zmienia się również rola, jaką uczeń odgrywa w procesie kształcenia. Z tkwiącego w ławce biernego słuchacza uczeń ma szansę stać się narratorem zajęć, biorąc czynny udział w organizowaniu przestrzeni edukacyjnej. Aktywne działanie towarzyszące uczeniu się poprzez odkrywanie ma szansę wzmocnić uczniowskie poczucie własnej skuteczności, konieczności właściwej organizacji informacji, planowania rozwiązania, a przede wszystkim weryfikacji uzyskanych rezultatów. Kształtująca się zdolność do przekształcania i weryfikowania informacji wspiera umiejętność przyjmowania różnych rozwiązań, obejmujących często skrajne podejścia do sytuacji zadaniowej, co przekłada się na rozwój umiejętności krytycznego myślenia (Lockhart, 2009). Ważną kwestią z punktu widzenia trwałości wiedzy jest pamięć. Odkrywanie, któremu zawsze towarzyszą silne emocje, pozostawia trwały ślad w pamięci i ułatwia dostęp

do przechowywanych tam informacji (Svinicki, 1998; Westwood, 2008). Częsta reorganizacja tych informacji powoduje, że stają się materiałem stale aktualnym. Ponadto dokonywanie odkryć podczas uczenia się powoduje, że uczący podchodzi konstrukcyjnie do rozwiązywania problemów (Bruner, 1978), a konstruowanie środowiska, w którym uczniom stwarza się możliwość do wytwarzania i rozwijania pomysłów, a także do korygowania źle zbudowanych koncepcji, wyzwala ich samodzielność w zakresie tworzenia bardziej ekonomicznych strategii rozwiązania problemów (Boaler, 2016; Gopnik, Meltzoff, Kuhl, 2004; Lu, Bridges, Hmelo-Silver, 2014). Celowo skonstruowane sytuacje problemowe stają się wyzwaniem edukacyjnym z dominacją takich aktywności matematycznych, jak dostrzeganie prawidłowości, porównywanie, dostrzeganie regularności i powiązań, organizacja i reorganizacja dotychczas zgromadzonych informacji czy wnioskowanie i formułowanie przypuszczeń (hipotez) (Maarif, 2016; Yurniwati, Hanum, 2017).

Ważnym aspektem tej metody jest to, że w trakcie pracy uczniowie mają możliwość przedyskutowania w grupie swoich spostrzeżeń, co znacząco oddziałuje na rozwój języka matematycznego. Wzbogacanie wypowiedzi o kolejne pojęcia matematyczne i umiejętność opisu następujących po sobie operacji matematycznych wykonywanych podczas rozwiązywania pogłębia rozumienie matematyki (Maarif, 2016). Ważnym aspektem dyskusji nad rozwiązaniem jest również rozwijanie umiejętności oceny własnych działań, porównywanie efektów pracy czy poszukiwanie innych możliwych rozwiązań przedłożonej sytuacji zadaniowej. Tak właśnie kształtuje się postawa refleksyjnego odkrywcy matematyki, w której to dyskusja na argumenty wyrabia nawyk sprawdzania przyjętej strategii rozwiązania oraz uzyskanego wyniku z warunkami zadania. Kolejnym walorem proponowanej metody jest kształtowanie umiejętności zapisu rozwiązania, analizy treści zadania z uwzględnieniem nie tylko jego części składowych, ale i zależności występujących między nimi, porządkowanie informacji oraz wybór odpowiedniego modelu matematycznego.

Punktem startu do nowej wiedzy w metodzie nauczania skierowanego na odkrywanie matematyki są dotychczasowe doświadczenia dziecka i jego wiedza. To od tych zasobów zależy, jak poprowadzimy odkrycie i jakich rezultatów możemy się spodziewać. Projektując przyszłe działania dziecka, musimy to uwzględnić, gdyż uczenie się matematyki w taki właśnie sposób koncentruje się na rozbudowywaniu dotychczasowych zasobów dziecka, rozwijaniu matematycznych umiejętności złożonych, wzbogacaniu języka matematycznego (w kierunku od języka potocznego do formalnego) oraz ukazywaniu matematyki jako dziedziny

spójnej, hierarchicznie uporządkowanej i funkcjonalnej. Wiedza własna dziecka, będąca podstawą nowego odkrycia, nie tylko łączy w całość to, co było z tym, co właśnie dostrzeżono, ale przede wszystkim ukazuje użyteczność dotychczasowych wysiłków dziecka, wspiera jego aktywność oraz wzmacnia poczucie sprawstwa (Liljedahl, 2005). Ważną cechą proponowanego rozwiązania jest rozwój świadomości funkcjonowania nauki i pozytywnego nastawienia do jej osiągnięć (Shymansky, Kyle, Alport, 1983). Wiele korzyści niesie z sobą towarzysząca odkrywaniu narracja. To za jej pomocą budujemy tło poznawcze, które znacząco wpływa na całościowe postrzeganie matematyki oraz łączy jej treści z sytuacjami z życia codziennego, wskazując przy tym jej użyteczności. Niepodważalnym argumentem przemawiającym za stosowaniem proponowanego rozwiązania jest wzrost osiągnięć w nauce (Moore, 2005; Amiyani, Widjajanti, 2018), lepsze rozumienie pojęć matematycznych (Maarif, 2016), rozwijanie wyższych poziomów myślenia poznawczego (Yuliani, Saragih, 2015; Amiyani, Widjajanti, 2018) oraz wzrost w zakresie samoregulacji uczenia się (Fauzi, Widjajanti, 2018). Konkludując – nauczanie skierowane na odkrywanie matematyki uznano za skuteczniejsze od nauczania skupionego na transmisji wiedzy i uznano jego walory w rozwijaniu zdolności matematycznych uczniów (Sahara i in. 2018).

Nie tylko w kontekście matematyki doszukamy się pozytywnych oddziaływań proponowanej metody. Forma organizacyjna takich lekcji uczy współpracy i dostrzegania korzyści płynących z pracy zespołowej nad rozwiązaniem (efekt synergii). Dzieci mają możliwość uczenia się od siebie nawzajem, a także szacunku do osób mających inne zdanie. Dyskusja o proponowanych rozwiązaniach oddala poczucie bycia ocenianym i kieruje uwagę na ocenę zaproponowanego rozwiązania. Uczniowie mają szansę wykazać się swoją pomysłowością, są twórczy podczas projektowania rozwiązań, a przede wszystkim chętnie podejmują wyzwania. Często w praktyce szkolnej możemy usłyszeć: *Nie pamiętam, jak to rozwiązać* lub obserwować całkowitą uczniowską kapitulację. Wyzwolenie w dzieciach przekonania, że mogą poszukiwać rozwiązań poprzez próbę odtworzenia drogi prowadzącej do odkrycia, postrzegam w kategoriach sukcesu. Nabieranie śmiałości oraz podejmowanie wyzwań intelektualnych na miarę uczniowskich możliwości poznawczych przekłada się również na inne dziedziny wiedzy, w których dostrzeganie pewnych zależności między obiektami lub zjawiskami czy formułowanie reguł i praw ma równie istotne znaczenie co w matematyce. Inaczej też postrzega się błędy pojawiające się na drodze odkrywania wiedzy. Pracując proponowaną metodą, znacznie zwiększamy świadomość uczniów, że błędy mogą się pojawiać

i są rzeczą zupełnie naturalną w trakcie uczenia się. Co więcej, pozwalają dostrzec sytuacje, w których dane prawo czy reguła nie działają i rozważyć z innej perspektywy warunki funkcjonowania nowej wiedzy. Warto pamiętać słowa Brunera: „Im bardziej dziecko potrafi traktować uczenie się jako odkrywanie czegoś, a nie jako uczenie się o czymś, tym silniej wystąpi u niego tendencja do uczenia się na zasadzie autonomicznego samonagradzania, a jeszcze lepiej – na zasadzie nagrody, jaką stanowi samo odkrycie” (Bruner, 1978, s. 679).

Jednak medal ma dwie strony i skoro wskazano zalety omawianego rozwiązania dydaktycznego, to zapewne możemy określić jego wady. Jedną z największych wad jest czasochłonność pracy nauczyciela. Wykorzystywanie tej metody w praktyce edukacyjnej wiąże się z pewnymi działaniami, które wykonujemy poza salą lekcyjną. Nauczyciel, aby dobrze przygotować lekcję, wśród czynności organizacyjnych musi uwzględnić kilka etapów. Pierwszy wiąże się z wyborem treści matematycznych przeznaczonych do odkrycia, drugi ze szczegółowym zaplanowaniem kolejnych aktywności uczniów i przygotowaniem pomocy dydaktycznych, a ostatni z weryfikacją uczniowskich spostrzeżeń i ukazaniem użyteczności nowej wiedzy. Takie przygotowanie w porównaniu z czasem poświęconym na przygotowanie zajęć opartych na realizacji podręcznika jest stanowczo bardziej czasochłonne. Ponadto zapewnienie uczniom właściwej ścieżki prowadzącej do odkrycia nowej wiedzy nie jest prostym zadaniem. Przeprowadzone w grupie 184 studentów pedagogiki wczesnoszkolnej i przedszkolnej badania autorskie¹⁰ ukazują, że omawianej metody nie możemy określić mianem intuicyjnej z dwóch powodów. Pierwszy z nich wskazuje na szkolne doświadczenia studentów. Okazuje się, że wśród nich nikt nie pracował tą metodą podczas swoich lekcji matematyki. Drugi wskazuje na automatyzację matematycznych czynności złożonych i brak umiejętności rozkładania ich na czynności proste. Nie wiem, czy podstawą tej trudności jest mechaniczne wypracowanie pewnych umiejętności matematycznych, czy brak umiejętności powrotu do podstaw własnej wiedzy. Jest to ciekawe zagadnienie, które wymaga pogłębionych badań. Na problem osobistych doświadczeń nauczycieli zwraca uwagę również Westwood. Jego zdaniem nie osiągniemy zamierzonych efektów zanurzeni w edukacji opartej na transmisji wiedzy i aktualnych doświadczeniach społecznych, rozwiązaniem może być jedynie zmiana myślenia o edukacji i zwrócenie się w kierunku edukacji twórczej, która uwalnia umysły uczniów i prowokuje do własnych poszukiwań (Westwood, 2008).

¹⁰ Materiał przygotowywany do publikacji.

Nauczanie matematyki skierowane na jej odkrywanie możemy określić mianem metody o wysokich wymaganiach dydaktycznych, a wśród wyzwań, którym musi sprostać nauczyciel, można wymienić:

- konieczność dokonywania analizy teoretycznej zagadnień matematycznych i dobieranie na jej podstawie zadań do realizacji przy jednoczesnej dbałości o to, aby zaproponowane zadania były dostosowane do możliwości poznawczych dziecka i tworzyły ciąg czynności prowadzących do odkrycia nowej wiedzy,
- gotowość przyjmowania postawy badawczej nie tylko po to, aby zaplanować kolejne etapy pracy uczniów, ale także po to, by obserwować ich konstrukty myślowe i to, w jaki sposób powstają,
- utrzymanie elastyczności niezbędnej do wprowadzania modyfikacji w trakcie lekcji (nie wszystko da się zaplanować i przewidzieć, gdy uczniowie pracują badawczo),
- konieczność utrzymania równowagi pomiędzy udzielanymi wskazówkami a zachowaniem niezależności uczniów; wiąże się to z oceną sytuacji, w której interwencja jest potrzebna – zbyt pośpieszne udzielanie przez nauczyciela wskazówek i narzucanie poprawnego rozwiązania zniweczy cały wysiłek włożony w przygotowywanie zajęć, a na pewno nie pomoże uczniom samodzielnie dojść do wiedzy,
- gotowość akceptowania błędów uczniowskich i wykorzystywanie ich jako przyczynku do dyskusji prowadzącej do pogłębiania rozumienia omawianego zagadnienia,
- akceptację wielokierunkowego porozumiewania się podczas zajęć, kiedy wymiana informacji między wszystkimi uczestnikami zajęć jest konieczna do wymiany spostrzeżeń, formułowania wniosków czy dyskusji popartej argumentami; ten niełatwy sposób porozumiewania się podczas lekcji uznany jest za najkorzystniejszą formę komunikacji (Włodarski, 1993, s. 425),
- umiejętność budowania nowej wiedzy na dotychczasowych osiągnięciach uczniów,
- przezwyciężenie postrzegania procesu szkolnego przez pryzmat własnych doświadczeń szkolnych opartych na tradycyjnym podejściu do nauczania i wynikającej z niego potrzeby „tłumaczenia” matematyki uczniom.

Kolejny zarzut stawiany uczeniu przez odkrywanie, z którym spotkałam się podczas rozmów z nauczycielami edukacji wczesnoszkolnej, dotyczył czasu trwania zajęć. Zdaniem nauczycieli na taką metodę po prostu nie ma czasu, gdyż należy ćwiczyć sprawności i umiejętności zaplanowane do opanowania na

danym etapie edukacyjnym. Jednak za odkrywaniem przemawia fakt, że nową wiedzę poprzedza jej rozumienie, a to skutkuje zmniejszeniem czasu, który trzeba przeznaczyć na dochodzenie do biegłości w posługiwaniu się nią. Świadome i rozumne zdobywanie wiedzy jest warunkiem jej trwałości. Na pytanie, czy warto poświęcać czas na odkrywanie tego, co zostało wcześniej odkryte przez innych, z całą odpowiedzialnością odpowiadam, że warto. Nie dotarłam do badań, które wskazywałyby na negatywne oddziaływania proponowanego rozwiązania dydaktycznego w sferze poznawczej, emocjonalno-wolicjonalnej, fizyczno-motorycznej i społecznej uczniów.

3.4. Przykłady zajęć matematycznych wraz z komentarzem

Poniżej podano przykłady lekcji, które możemy przeprowadzić we wczesnej edukacji. Dobór ich nie był przypadkowy. Zależało mi, aby wśród nich znalazły się lekcje, na których uczniowie poszukują i budują algorytmy (dodawanie liczb dwucyfrowych w zakresie 100 z przekroczeniem progu dziesiątkowego), poszukują własności matematycznych (łączność i przemienność dodawania) oraz takie, które odpowiadają na uczniowskie pytania pojawiające się w trakcie nauki (*Skąd wzięły się liczby? Skąd się wzięła podziałka na linijce?*), czy wreszcie nawiązujące do zadań optymalizacyjnych z matematyki, których rozwiązywanie przysparza uczniom w klasach starszych wielu trudności. Przedstawione propozycje nie są gotowymi konspektami. Są to opisy, które oczywiście można modyfikować według potrzeb nauczyciela. Najważniejsze jest jednak, aby pisany na ich podstawie konspekt oddawał istotę proponowanego rozwiązania.

W opisywanych przykładach niektóre pomoce dydaktyczne można przygotować samodzielnie lub wspólnie z uczniami. Ten drugi sposób jest wartościowszym rozwiązaniem, bo sprawdza się w sytuacjach, gdy uczniowie, samodzielnie rozwiązując zadania, posilkują się tą umiejętnością. Warto pamiętać, że choć dostrzeganie otaczających kształtów oraz manipulowanie obiektami są podstawą kształtowania pojęć czy dostrzegania regularności i błędem byłoby wyeliminowanie ich z lekcji, to usilne dobieranie ćwiczeń na konkretach w żaden sposób nie przyspieszy osiągnięcia postawionego na wstępie celu. Co więcej, może przyczynić się do zmniejszenia atrakcyjności lekcji. Przygotowując zajęcia i dobierając pomoce dydaktyczne, zadbajmy, aby nie odwracały uwagi uczniów od treści zajęć. Warto pamiętać, że uczniowie potrzebują wyzwania, zagadek oraz tajemnic do odkrycia, a nie zabawek.

1. Czy potrzebna jest nam wspólna miara?

Komentarz

Dziś posługujemy się jedną miarą i nie budzi to naszych wątpliwości. Uważamy, że takie rozwiązanie nie tylko pozwala sprawiedliwie, ale i dokładnie odmierzyć wymaganą długość bez względu na to, w której części naszego globu się znajdujemy. Wzorce podstawowych jednostek zatwierdzone i przechowywane przez Międzynarodowe Biuro Miar i Wag pozwalają na kontrolowanie tych, którymi posługujemy się na co dzień. Jest to dla nas zupełnie naturalne, że linijka z Japonii, Nowej Zelandii, Kolumbii i Polski mierzy tak samo. Nie jest to jednak tak oczywiste dla dzieci. Jednym z zabiegów dydaktycznych wyjaśniających tę kwestię jest opowieść o tym, jak mierzono dawniej i dziś oraz dlaczego teraz posługujemy się linijką. Proponowane przeze mnie rozwiązanie umożliwia organizację lekcji, na której uczniowie sami poczują potrzebę stosowania wspólnej miary, a przy tym będą wielokrotnie dokonywali pomiarów różnych obiektów i porównywali swoje rezultaty. Celem zajęć jest kształtowanie umiejętności dokonywania pomiarów oraz uświadomienie potrzeby posługiwania się wspólną miarą.

Pomoce dydaktyczne:

- paski papieru i sznurki, za pomocą których dzieci będą dokonywały pomiaru (zestawy dla zespołów powinny zawierać paski i sznurki różnej długości).

Miejsce zajęć:

- może to być boisko szkolne, park, sala gimnastyczna lub sala lekcyjna.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Tę część lekcji rozpoczynamy swobodną rozmową na temat pomiarów długości różnych obiektów. Warto spytać dzieci, czy dokonywały pomiarów, w jakich sytuacjach, czy sprawiło im to trudność. Następnie prosimy, aby wymienić znane im przyrządy do mierzenia długości i spróbowały opisać ich wygląd. Po przywołaniu wszystkich znanych dzieciom informacji na temat dokonywania pomiaru oraz wykorzystanych do tego przyrządów warto zapytać o to, jak dokonać pomiaru, jeśli nie mamy linijki.

Drugi etap – Widzę sens

W rozmowie z dziećmi pozyskamy pewnie wiele podpowiedzi i pomysłów na to, jak dokonać pomiaru bez użycia specjalnie do tego przygotowanej miary. Wprowadzając uczniów w temat zajęć, przedstawiam sytuację, w której „zapodziała” się miara, a wymiary muszą być podane. Jak zatem dokonać pomiaru bez użycia linijki?

Trzeci etap – Popróbuję i zobaczę, jak to działa

W niniejszej propozycji przyjmijmy, że zajęcia dla dzieci będą się odbywały na boisku szkolnym. Po wymianie pomysłów na to, w jaki sposób zmierzyć boisko szkolne, proponujemy, aby uczniowie podzielili się na dwa zespoły. Właśnie w takich zespołach dzieci będą dokonywały pomiarów – najpierw długości, a później szerokości boiska szkolnego. Staramy się tak organizować zajęcia, aby każde z dzieci mogło czynnie uczestniczyć w mierzeniu. Wyniki uzyskane przez zespoły nauczyciel notuje w specjalnie przygotowanej tabeli. Dzieci mierzą na początku krokami długość boiska w jedną i drugą stronę, każdy zespół na przeciwległym boku. Ważne jest, aby dopilnować, by za każdym razem inne dziecko dokonywało pomiaru. To samo powtarzamy dla szerokości. Po pomiarach krokami prosimy, aby dzieci dokonały pomiaru specjalnie przygotowanymi przez nauczyciela paskami, a następnie sznurkami. Po każdym pomiarze głośno odcytujemy uzyskane w grupach wyniki. W trakcie części praktycznej tych zajęć pojawią się wątpliwości, które podtrzymujemy pytaniem: *Która z grup poprawnie dokonała pomiaru?* W tej części lekcji zależy nam na wybrzmieniu spostrzeżenia, że różne pomiary są wynikiem stosowania różnej miary.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Po wymianie spostrzeżeń należy przejść do porównania pasków i sznurków, którymi dzieci dokonywały pomiarów. To właśnie w wyniku ich porównania uczniowie uzyskają potwierdzenie własnych przypuszczeń. Jednak to nie od nauczyciela powinna wyjść propozycja porównania narzędzi pomiaru. Zadaniem nauczyciela jest pokierowanie w taki sposób dyskusją, aby ten pomysł wyszedł od uczniów. Na etapie przygotowywania narzędzi pomiaru, czyli pasków i sznurków, musimy zadbać, aby różnica ich długości nie była na tyle duża, żeby jeszcze przed rozpoczęciem działań zostało to dostrzeżone.

Piąty etap – Odkryłem nieznana mi dotąd matematykę

Ten etap lekcji jest ustaleniem wspólnego stanowiska, czyli sformułowaniem wniosku, że dokonywanie porównywalnych pomiarów wiąże się z użyciem wspólnej miary.

Szósty etap – Sprawdzę, jak to działa

Na koniec prosimy uczniów, aby zastanowili się, jakie nieporozumienia i w jakich sytuacjach mogą się zdarzyć, gdy posługujemy się różną miarą. Rozmowa o przykładach podanych przez dzieci kończy lekcję.

Uwagi

Oczywiście w sytuacji, gdy wyjście na boisko szkolne, do parku, czy szkolny plac zabaw jest utrudnione, lekcję możemy przeprowadzić w niewielkich grupach w klasie, a uczniowie mogą mierzyć ten sam obiekt za pomocą pasków różnej długości.

2. Skąd wzięły się podziałki na linijce szkolnej?

Komentarz

Dziecięca ciekawość poznawcza to wielka siła, którą należy uwzględniać, organizując zajęcia. Jedno z pytań, którym zaskoczyły mnie dzieci, dotyczyło odcinka jednostkowego na linijce szkolnej. Zapytano mnie, dlaczego ten odcinek jest akurat takiej, a nie innej długości. Wyjaśnienia, którymi zasypałam ucznia, nie zostały przyjęte z wielkim entuzjazmem. Zaczęłam się zastanawiać, w jaki sposób przekonać dzieci, że ktoś kiedyś dokonał takiego wyboru (bo wyjaśnienia o jednej miliardowej długości mierzonej od równika do bieguna wzdłuż południka przechodzącego przez Paryż zdawały się na tym etapie niewystarczające). Zrodził się problem potwierdzenia wyboru długości odcinka jednostkowego na linijce. Pomysł na dziecięce badania potwierdzające uzasadniony wybór długości jednostki na linijce szkolnej został zaczerpnięty z poradnika metodycznego Jadwigi Hanisz (2016, s. 199).

Pomoce dydaktyczne:

- kolorowe liczby (przyjęto, że uczniowie znają klocki Cuisenaire’a, w innym przypadku należy przeprowadzić lekcję, na której uczniowie dokładnie zbadają wymienioną pomoc dydaktyczną),

- prostokąty w trzech kolorach o wymiarach $9\text{ cm} \times 13\text{ cm}$, $11\text{ cm} \times 19\text{ cm}$, $14\text{ cm} \times 23\text{ cm}$ (nie muszą być dokładnie takie wymiary, ale muszą spełniać ważny warunek, tj. wymiary prostokąta muszą być liczbami względnie pierwszymi),
- linijki szkolne, kolorowe paski różnej długości (w celu ułatwienia sobie rozmowy z dziećmi warto przygotować paski tak, aby ten sam kolor gwarantował tę samą długość),
- prostokątne kartoniki z zaznaczoną współrzędną zero, na których dzieci będą przygotowywały własne linijki.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Prosimy dzieci, aby na lekcję przyniosły linijki szkolne, każde z nich co najmniej dwie. Lekcję zaczynamy od swobodnej rozmowy, w której uczniowie prezentują swoje linijki, opisując ich kształt i zakres pomiaru. Następnie prosimy o zmierzenie przygotowanych przez nauczyciela pasków kolorowego papieru. Po podawanych przez dzieci wynikach pomiaru nauczyciel zorientuje się, jak dzieci radzą sobie z mierzeniem długości. Następnie prosimy, aby uczniowie porównali ze sobą zgromadzone linijki i omówili, czym się różnią oraz wskazali podobieństwa.

Drugi etap – Widzę sens

Teraz należałoby zapytać, czy uczniowie zastanawiali się kiedyś, skąd wzięła się podziałka na linijce oraz dlaczego odcinek jednostkowy ma taką, a nie inną długość.

Trzeci etap – Popróbuję i zobaczę, jak to działa

Zapraszamy dzieci do przeprowadzenia badań w grupach. Każda grupa otrzymuje niezbędny zestaw, tj. kolorowe liczby i przygotowane prostokąty. Zadaniem uczniów będzie dokonanie dokładnego pomiaru długości i szerokości prostokąta. Po ustaleniu wyników uczniowie zapisują je na prostokącie. Ważne w tych badaniach jest to, że nie dokonujemy pomiaru linijką, lecz za pomocą kolorowych liczb. Należy wyraźnie określić zasadę, według której uczniowie mają dokonać pomiaru. Ich zadaniem będzie znalezienie wśród wszystkich kolorowych liczb klocka tej długości, który pozwoli dokonać dokładnego pomiaru długości i szerokości prostokąta (jednego dla obydwu wymiarów). Oczywiście wskazanie klocka o dłu-

gości 1 cm jako najodpowiedniejszego do dokonania pomiaru jest poprawnym rozwiązaniem. Na tym etapie najważniejszy jest proces badawczy, czyli poszukiwanie wyniku, kontrola pomiaru, przyjęcie bądź odrzucenie dokonanego wyboru.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Uczniowie prezentują wyniki, które uzyskali. Jeśli są takie same, to znaczy, że za każdym razem do dokonania dokładnego pomiaru wykorzystywali klocek biały (o długości 1 cm). W celu potwierdzenia własnych przypuszczeń prosimy, aby wylosowali prostokąt z dodatkowo przygotowanego zestawu i sprawdzili, czy w tym przypadku również udało się dokonać dokładnego pomiaru.

Piąty etap – Odkryłem nieznana mi dotąd matematykę

Na tym etapie lekcji uczniowie wspólnie formułują wniosek o wyborze najodpowiedniejszego klocka do dokonania dokładnego pomiaru. W celu potwierdzenia uczniowskich spostrzeżeń prosimy, aby sprawdzili, czy długość odcinka jednostkowego na przyniesionych przez nich linijkach jest taka sama, jak długość wybranego klocka.

Szósty etap – Sprawdź, jak to działa

Prosimy uczniów, aby na specjalnie przygotowanych paskach zbudowali własne linijki. Należy uczulić dzieci, że dokładność, z jaką odkładają kolejne odcinki na własnych linijkach, jest bardzo ważna i od tego zależy dokładność pomiaru. Po wykonaniu własnych linijek dzieci przechodzą do mierzenia dowolnie wybranych obiektów znajdujących się w klasie. Ważne jest, aby pomiary dzieci były dokonywane linijką przyniesioną na lekcję oraz tą, którą sami zrobili.

Uwaga

Celem tej lekcji nie jest nabranie przekonania przez uczniów, że to Cuise-naire wskazał taką, a nie inną długość 1 centymetra. Chodzi nam raczej o uświadomienie, że odcinek jednostkowy nie jest dowolnie wybrany przez producenta linijki. Całość lekcji możemy zakończyć opowiadaniem o układzie SI¹¹.

¹¹ Układ SI, czyli Międzynarodowy Układ Jednostek Miar ujednolicony i zatwierdzony w 1960 r. podczas XI Generalnej Konferencji Miar, w Polsce funkcjonuje od 1966 r.

3. W jakiej kolejności możemy dodawać liczby?

Komentarz

Przemienność dodawania pojawia się już na samym początku szkolnej przygody uczniów z matematyką, co więcej – spotkałam przedszkolaków, którzy twierdzili, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności dodajemy liczby. Mimo to przemienność dodawania zdaje się być nieoczywistą własnością i brak umiejętności posługiwania się nią pojawia się w przykładach rachunkowych typu $4 + 5 + 6$. Oczywiście oprócz przemienności dodawania warto również poświęcić zajęcia na łączność dodawania, która także nie jest w naturalny sposób dostrzegana przez wszystkich uczniów. Brak umiejętności korzystania z łączności dodawania zaobserwujemy w przykładach typu $5 + 4 + 6$. Dzieci mają nawyk dodawania liczb w kolejności występowania, jednak dostrzeżenie dopełniającej się do 10 sumy liczb 4 i 6 znacznie ułatwi rachunki. Warto zatem poświęcić lekcję na wymienione własności działań.

Pomoce dydaktyczne:

- kolorowe liczby, liczmany, paski liczbowe do kolorowania, tabliczki liczbowe, liczydła sznurkowe

Pierwszy etap – Co już wiem?

Cała lekcja opiera się na umiejętności dodawania liczb naturalnych, dlatego aby skoncentrować uwagę uczniów, wystarczy przeprowadzić krótką zabawę, np. w telefon: *Halo, halo, tu numer 3, dzwonię do numeru o 5 większego. Halo, halo, tu numer 8, dzwonię do numeru o 2 większego* lub *Zgadnij, kto* specjalnie przygotowanymi kartami. Bardzo dobrą propozycją będzie również „krokowanie” autorstwa M. Hejnego.

Drugi etap – Widzę sens

Chcąc pokazać dzieciom sens zajmowania się tym tematem, należałoby wywołać sytuację, która zaintryguje uczniów i skieruje ich wysiłek na poszukiwanie odpowiedzi na postawione przez nauczyciela pytanie. Najprostszym przykładem będzie wytworzenie sytuacji, w której uczniowie nie tylko będą musieli dokonać wyboru stanowiska spośród prezentowych przez nauczyciela, ale rów-

nież uzasadnić swój wybór. Najszybszym sposobem będzie zapisanie na tablicy dwóch przykładów wraz ze sposobem rozwiązania i kolejnością dodawania określonej przez strzałki, tj.

$$\begin{array}{c} 4 + 5 + 6 = 9 + 6 = 15 \\ \text{↖ ↗} \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{c} 4 + 5 + 6 = 10 + 5 = 15 \\ \text{↖ ↗} \end{array}$$

Teraz wystarczy postawić pytania: *Który ze sposobów obliczenia jest poprawny? Który z tych sposobów wybralibyście do własnych obliczeń i dlaczego?* Ta część lekcji opiera się na przyjmowaniu uczniowskich propozycji. Powstrzymujmy się od silnej pokusy niesienia prawidłowych odpowiedzi. Jeśli już musimy coś powiedzieć, to ograniczmy się do komentarzy typu: *Tak uważasz, a Marcina zdaniem...* I nic ponadto. Jeśli już na wstępie lekcji będziemy przekonywać uczniów o prawdziwości bądź nieprawdziwości ich wyborów, to cała lekcja przestaje mieć rację bytu. Stanie się tylko wykonywaniem poleceń nauczyciela i na pewno straci cały swój urok i tajemnicę. Nawet wówczas, gdy znajdą się uczniowie, dla których kolejność wyboru liczb przy dodawaniu nie ma znaczenia, to należy przyjąć ten fakt, ale nie komentować go w żaden sposób. Ta atmosfera tajemniczości zawsze udziela się wszystkim uczniom, bo w tym wieku intensywnie poszukują potwierdzenia własnych spostrzeżeń i przemyśleń.

Trzeci etap – Popróbuj i zobacz, jak to działa

Na tym etapie uczniowie przechodzą do badania w grupach. Ich celem będzie odkrycie, że liczby możemy dodawać w dowolnej kolejności. Wyposażamy grupy w specjalnie przygotowane pomoce dydaktyczne i przykłady do rozważenia, które będą podstawą uczniowskich badań. Zależy nam na tym, aby uczniowie na różnych obiektach sprawdzili, że dodawanie jest przemienne oraz łączne. Forma zaproponowanych do rozwiązania zadań zależy od wieku grupy docelowej. Jeśli lekcję przeprowadzamy w klasie drugiej, możemy stworzyć zestaw przykładów (zapis symboliczny) do rozwiązania na obiektach. Jeśli lekcję zamierzamy przeprowadzić z pierwszoklasistami, dobrym pomysłem będzie przygotowanie prostych zadań tekstowych z częścią semantyczną odpowiadającą sytuacjom, z którymi spotkali się w życiu codziennym. Wtedy nauczyciel będzie prowadził całe badanie, przedstawiając uczniom treści przygotowanych zadań. W tym wypadku możemy dodatkowo wprowadzić prezentację rozwiązań na rysunku.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Teraz prosimy grupy, aby podzieliły się swoimi wynikami. Kolejno opowiadają o swoich rezultatach. Następnie prosimy, aby każda z grup na przygotowanej kartce napisała dwa przykłady dla uczniów z innej grupy. Po wymianie kartek między poszczególnymi grupami uczniowie przechodzą do sprawdzenia, czy w innych przykładach kolejność dodawania liczb również nie ma znaczenia. Uczniowie sami dokonują wyboru pomocy dydaktycznej do uzasadnienia swojego stanowiska.

Piąty etap – Odkryłem nieznaną mi dotąd matematykę

W tej części lekcji uczniowie wspólnie sformułują rozważane podczas zajęć własności liczb naturalnych. Nie ma konieczności nazywania tych własności. Powinno nam zależeć na tym, aby uczniowie potrafili je opisać, czyli wskazać, na czym polegają, i uzupełnić swoją wypowiedź o sytuację, w których mogą z nich skorzystać.

Szósty etap – Sprawdź, jak to działa

Ten etap lekcji poświęćmy na indywidualną pracę uczniów, którzy rozwiązując zaproponowane przez nauczyciela przykłady, będą korzystali z nowo odkrytych własności działań.

Uwagi

Zaproponowaną lekcję możemy przeprowadzić nie tylko w klasie pierwszej. W klasach starszych wystarczy dobrać trudniejsze przykłady i odpowiednie pomoce dydaktyczne. Bardzo ważnym aspektem tej lekcji jest wykonanie badań na obiektach rzeczywistych. Budowanie zbiorów o danej liczbie elementów, układanie kolorowych liczb, korzystanie z liczydeł sznurkowych czy pasków liczbowych ma ułatwić dzieciom rozstrzygnięcie kwestii kolejności dodawania liczb w działaniu.

4. Jak myślicie, czy kwadrat możemy nazwać prostokątem?

Komentarz

Celem ogólnym lekcji jest dostrzeżenie, że każdy kwadrat posiada wszystkie własności prostokąta. Aby to osiągnąć, musimy skierować uwagę uczniów na konieczność porównywania obiektów, poszukiwania i dostrzegania podobieństw oraz różnic przy jednoczesnym kształtowaniu umiejętności planowania i przeprowadzania badań.

Pomoce dydaktyczne:

- przygotowane z kolorowego papieru kwadraty i prostokąty o różnej długości boków (co najmniej po 8 obiektów) oraz figury o nieznanych dzieciom kształtach,
- linijka,
- samodzielnie zbudowany model kąta prostego,
- pętle ze sznurka do budowy zbiorów, klej, arkusze szarego papieru, kartki kolorowego papieru.

MODEL KĄTA PROSTEGO



Fot. Lidia Pawlusińska

Instrukcja budowy modelu kąta prostego:

- weź kawałek papieru – może być o nieregularnym kształcie, np. wyrwana strona ze starej gazетки reklamowej,
- zegnij papier w połowie,
- złożony papier zegnij ponownie tak, aby powstałe uprzednio zgięcie pokrywało się

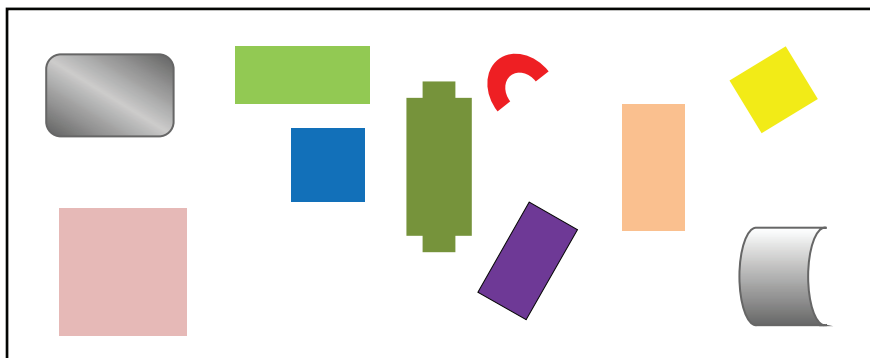
Pierwszy etap – Co już wiem?

Pierwszy etap lekcji rozpoczynamy od przypomnienia i zebrania wszystkich informacji o figurach geometrycznych. Tak jak poprzednio, pamiętajmy, że nauczyciel nie uzupełnia informacji pozyskanych od uczniów. Ważne jest, aby usłyszeć na wstępie, jakie figury geometryczne uczniowie znają, po czym je rozpoznają oraz czy potrafią nazwać elementy figur, tj. boki, wierzchołki i kąty. W tym celu możemy przeprowadzić rozmowę kierowaną pytaniami: *Czy spotkaliście się z określeniem figury geometrycznej? Jakie znacie figury geometryczne? Przyjrzyjcie się teraz uważnie figurom geometrycznym, które Wam przygotowałam (każdą parę uczniów należy wyposażyć w modele figur: trójkąt, kwadrat, prostokąt, koło). Spróbujcie odgadnąć ich nazwę. Po czym poznajecie, że to np. trójkąt?*

Drugi etap – Widzę sens

Przed uczniami umieszczamy kilka figur (na rysunku przedstawiono nie-liczne, aby zaprezentować, o jaki układ figur należy zadbać, natomiast dziecięcy zestaw powinien składać się z minimum 30 figur geometrycznych, z czego co

najmniej 8 powinno być kwadratami, a 8 tylko prostokątami). Nauczyciel prosi o nazwanie i stawia pytanie: *Co sprawiło Wam trudność?*



Następnie prosi o wybranie tych figur, które uczniowie potrafią nazwać, i o uporządkowanie ich w zbiory. Zwraca się do uczniów z pytaniem: *Jakie cechy brałiscie pod uwagę, budując swoje zbiory?* oraz prosi o zastanowienie się, jak inaczej można wybrane prostokąty i kwadraty uporządkować w zbiory.

Trzeci etap – Popróbuje i zobaczę, jak to działa

Uczniowie, pracując w grupach, muszą odkryć inny niż narzucający im się na wstępie sposób uporządkowania kwadratów i prostokątów. Aby ułatwić im zadanie, kierujemy ich uwagę w stronę własności figur. Przygotowane na paskach własności uczniowie muszą przyporządkować do zbioru. Ważne jest, aby każda własność, mimo że pasuje zarówno do kwadratów, jak i prostokątów, wystąpiła tylko raz.

Wszystkie boki
są tej samej długości.

Wszystkie kąty są proste.

Odcinki poprowadzone między dwoma
przeciwległymi wierzchołkami
przecinają się w połowie.

Przeciwległe boki są
tej samej długości.

Wszystkie kąty mają
tę samą miarę.

Odcinki poprowadzone między dwoma
przeciwległymi wierzchołkami są tej
samej długości.

Kąty powstałe między odcinkami
poprowadzonymi od przeciwległych
wierzchołków są proste.

Polecenie

Przyjrzyjcie się uważnie podanym na paskach opisom i przyporządkujcie je do odpowiedniego zbioru figur. Przed podjęciem decyzji dokonajcie właściwych pomiarów, korzystając z linijki i modelu kąta prostego.

Jest to przykład zadania, które wywołuje wiele emocji. Uczniowie szybko dostrzegają, że przy początkowym układzie figur nie możemy prawidłowo przyporządkować opisu.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Dzieci dzielą się wynikami swoich badań. Dyskusja, która wywiąże się podczas prezentacji wyników pracy w grupach, ma doprowadzić do decyzji o innej organizacji prostokątów i kwadratów w zbiorze. Nam zależy na tym, aby uczniowie dostrzegli, że wszystkie własności prostokąta spełnia kwadrat, ale nie każdą z pasujących do kwadratu własności możemy przyporządkować do prostokąta. Po wspólnej dyskusji prosimy uczniów, aby na przygotowanych arkuszach szarego papieru zrobili plakat, który będzie uwzględniał inny od początkowego układ zbiorów (kwadraty i prostokąty). Ten nowy układ ma umożliwić jednoznaczne przyporządkowanie opisu do zbioru.

Piąty etap – Odkryłem nieznana mi dotąd matematykę

Ten etap przeznaczymy na prezentację plakatów i omówienie sposobów uporządkowania zbiorów. Jeśli w trakcie lekcji żadna z grup nie odkryje właściwego uporządkowania zbiorów, nauczyciel może wspólnie z uczniami zbudować jeden klasowy model, prowadząc uczniów pytaniami o ich spostrzeżenia i związane z nimi decyzje. Finałem tej lekcji ma być odkrycie, że każdy kwadrat jest prostokątem, ale nie każdy prostokąt jest kwadratem.

Szósty etap – Sprawdzę, jak to działa

W tej części zajęć prosimy uczniów, aby zbudowali prostokątne miasto. Prosimy, aby w tym celu wykorzystali przygotowane przez nauczyciela figury. Dzieci kleją plakaty, a warunkiem dobrze wykonanego zadania jest umieszczenie na obrazku wszystkich prostokątów i kwadratów wchodzących w skład nauczycielskiego zestawu.

Uwagi

Proponowana lekcja wymaga przygotowania zestawu wielu powycinanych z papieru figur. Nie powinno nas to zniechęcać, bo efekty tej lekcji będzie można obserwować nie tylko wtedy, gdy dzieci rozstrzygają, że dana figura jest kwadratem albo tylko prostokątem. Cała konstrukcja badania własności kwadratów i prostokątów intuicyjnie zostanie przeniesiona przez dzieci na lekcję dotyczącą np. klasyfikacji czworokątów czy podczas ustaleń, że każdy sześciąt jest prostopadłością. Lekcja ma uczyć podejmowania decyzji na podstawie własności i podkreślać konieczność ich wskazywania. Ponadto pomoce dydaktyczne niezbędne do lekcji możemy przygotować wraz z uczniami wcześniej.

5. Jak najłatwiej dodać do siebie dwie liczby dwucyfrowe?

Komentarz

Taką lekcję warto przeprowadzić w czasie, kiedy uczniowie mają już za sobą pierwsze doświadczenia z dodawaniem liczb dwucyfrowych, z tym że przykłady, z którymi się dotychczas spotkali, ograniczały się do dodawania bez przekraczania progu dziesiętkowego. Celem tej lekcji jest nie tylko wskazanie możliwych sposobów wyznaczania sum liczb dwucyfrowych z przekroczeniem progu dziesiętkowego, ale również dokonanie oceny i wybór najwłaściwszego dla każdego z nich. Lekcja nie koncentruje się zatem na doskonaleniu posługiwania się algorytmem wskazanym przez nauczyciela, lecz na poszukiwaniach algorytmu. Za równie istotną cechę tej lekcji uznaję uczniowskie objaśnienia odkrytych sposobów dodawania liczb dwucyfrowych z przekroczeniem progu dziesiętkowego oraz uzasadnienia dokonanych wyborów. Budowanie algorytmu, czyli algorytmizacja, jest ważną kompetencją matematyczną i właśnie na takich przykładach warto ją kształtować.

Pomoce dydaktyczne:

- liczydła sznurkowe, tabliczki liczbowe, tabelki z podziałem na setki, dziesiątki i jedność,
- duże i małe guziki,
- złoty zestaw z pomocy Montessori (jeśli jest dostępny w szkole),
- arkusze szarego papieru, kolorowe mazaki lub kredki.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Koncentrujemy uwagę uczniów na tematyce zajęć poprzez pytania: *Gdzie według was przydaje się umiejętność dodawania? W jakich sytuacjach warto szybko policzyć wynik w pamięci?* Nawiązujemy do sytuacji, w których uczniowie muszą dodawać duże liczby i prosimy o podanie wyników następujących działań: $12 + 5$, $16 + 2$, $13 + 10$, $20 + 40$, $22 + 31$, $35 + 47$ (przykłady koniecznie należy zapisać na tablicy). Pytamy: *Który z tych przykładów jest według Was najtrudniejszy do obliczenia w pamięci?* lub *Który przysporzył Wam najwięcej trudności?*

Drugi etap – Widzę sens

Pytamy uczniów: *Zastanawialiście się kiedyś, jak ułatwić sobie zadanie? Jak myślicie, czy istnieje sposób ułatwiający dokonywanie obliczeń w pamięci?*

Trzeci etap – Popróbuje i zobaczę, jak to działa

Przed dziećmi w grupach kładziemy przygotowane zestawy przykładów i pomoce dydaktyczne. Ich zadanie będzie polegało na znalezieniu możliwie największej liczby sposobów na dodawanie liczb dwucyfrowych w zakresie 100 z przekroczeniem progu dziesiątkowego. Na plakatach dzieci przygotowują swoje prezentacje. Należy na nich umieścić wszystkie odkryte przez nich sposoby dodawania oraz dokonać wyboru jednego, który ich zdaniem jest najprostszy.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

W tej części dzieci prezentują wyniki pracy w grupach w formie plakatów. Zadaniem nauczyciela jest wyeksponowanie wszystkich uczniowskich propozycji. Następnie zachęcamy dzieci, aby przyjrzały się uważnie propozycjom innych grup i spróbowały odpowiedzieć na pytanie: *Który z zaprezentowanych sposobów dodawania liczb dwucyfrowych jest ich zdaniem najłatwiejszy?*

Piąty etap – Odkryłem nieznaną mi dotąd matematykę

W tym wypadku uczniowie powinni w toku dyskusji dojść do wniosku, że nie możemy określić jednego, jedynego i najłatwiejszego sposobu wyznaczania ta-

kich sum. Tu wartość dydaktyczna aktywności uczniów kryje się w dostrzeżeniu, że wiele dróg prowadzi do uzyskania poprawnego wyniku i tak naprawdę nie ma znaczenia, którym wyznaczą sumę. Ważne w całej lekcji jest to, że uczniowie nabywają przekonania, że do poprawnej odpowiedzi prowadzi wielu dróg i – co bardziej wartościowe – że każda z nich została omówiona w zakresie różnic i podobieństw.

Szósty etap – Sprawdź, jak to działa

Teraz uczniowie mogą sprawdzić trafność swoich wyborów indywidualnie. Prosimy ich, aby policzyli podane przez nauczyciela sumy początkowo sposobem, który według nich jest najlepszy, następnie innymi, aby porównać i upewnić się w swoich wyborach.

Uwagi

Oczywiście taką samą lekcję możemy przeprowadzić, poszukując najlepszych sposobów na wyznaczanie różnic z przekroczeniem progu dziesiętkowego. Możemy też w obrębie jednej lekcji połączyć dodawanie z odejmowaniem. Wszystko tak naprawdę zależy od możliwości poznawczych uczniów i ich dotychczasowych osiągnięć.

6. Czy z każdej dowolnej liczby zapalek możemy ułożyć trójkąt?

Komentarz

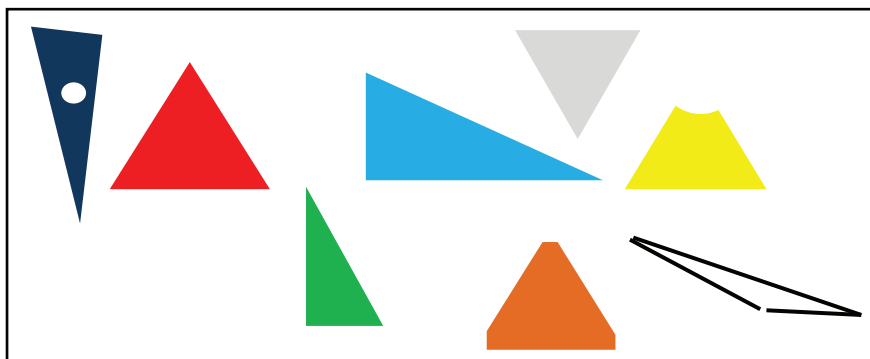
Celem tej lekcji jest odkrycie nierówności trójkąta. Uczniowie, budując różne trójkąty ze wskazanej liczby zapalek, będą musieli rozstrzygnąć, dlaczego nie z każdej liczby zapalek możemy taki trójkąt zbudować. Odpowiedź w przypadku jednej i dwóch zapalek jest oczywista, ale cała zagadka koncentruje się wokół tego, że z czterech zapalek nie możemy zbudować trójkąta. Kolejnym istotnym elementem tej lekcji jest zwrócenie uwagi uczniów na konieczność rozpatrzenia wszystkich możliwych trójkątów, które mogą powstać z danej liczby zapalek. Całość badań uczniowskich kończy się odkryciem i sformułowaniem jednego ze związków miarowych trójkąta, tj. suma długości dwóch dowolnie wybranych boków trójkąta musi być dłuższa niż długość trzeciego boku.

Pomoce dydaktyczne:

- zapalki,
- przygotowane figury geometryczne.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Zaczynamy od rozmowy, której celem jest pozyskanie informacji o wiedzy uczniów na temat figur geometrycznych. Należy pamiętać, że nie ma potrzeby ograniczać się do koła, prostokąta, kwadratu i trójkąta. Jest to dobry moment, aby porozmawiać o dostrzeganych przez nich kształtach w otaczającej rzeczywistości, tj. gdzie się z nimi spotkali i czy faktycznie są istotne w życiu codziennym. Pamiętajmy, że pytania kierowane do uczniów nie powinny w żaden sposób ograniczać ich wypowiedzi. Tak jak podczas lekcji o własnościach kwadratów i prostokątów, pytamy o znane dzieciom figury geometryczne. Następnie prezentujemy uczniom przygotowany zestaw figur. Wszystkie z zaprezentowanych figur kształtem przypominają trójkąt, ale niektóre z nich mają ścięte rogi, inne wycięty we wnętrzu okrągły otwór. Zabieg ten jest celowy. Przed rozpoczęciem matematycznych poszukiwań warto zwrócić uwagę na wszystkie elementy trójkąta, aby podczas budowania własnych nie robić „dziur” między zapałkami oraz przypomnieć, że trójkąt wcale nie musi mieć boków równej długości. Bardzo ważne jest, aby każda grupa otrzymała swój własny zestaw. Na wszystkich proponowanych zajęciach nie korzystamy z zestawu demonstracyjnego, gdzie tak naprawdę tylko nauczyciel ma kontakt z obiektem matematycznym, sam go bada i od samego początku podświadomie koncentruje się na tych elementach, które prowadzą do dobrze znanego mu rozwiązania.



Drugi etap – Widzę sens

Początkowo luźna rozmowa o figurach geometrycznych przekształca się w rozmowę o trójkątach, a dokładniej o jego bokach, kątach i wierzchołkach.

Teraz uwaga uczniów, skupiona na wybranej figurze, w naszym wypadku na trójkącie, ma pomóc poszukać odpowiedzi na pierwsze pytanie lekcji, czyli: *Jak myślicie, czy z dowolnej liczby zapalek zbudujemy trójkąt?*

Trzeci etap – Popróbuje i zobaczę, jak to działa

Uczniowie w grupach budują trójkąty. Aby ukierunkować poszukiwania, prosimy uczniów, aby ułożyli, o ile to możliwe, trójkąty kolejno: z jednej zapalki, dwóch zapalek, trzech zapalek, czterech zapalek, pięciu zapalek, aż do dziesięciu. Prosimy również, aby wybierając daną liczbę zapalek, zbudowali wszystkie możliwe trójkąty (np. z dziewięciu zapalek ułożymy trójkąty o bokach: (3, 3, 3), (2, 3, 4) czy (4, 4, 1)). Ułożone trójkąty pozostawiamy na stolikach, będą potrzebne do odkrycia nierówności trójkąta. Efekty pierwszego etapu pracy w grupach, czyli zbudowane trójkąty, uczniowie prezentują sobie nawzajem. Warto, aby wstali z krzeseł i podeszli do stolików kolegów w czasie, gdy ci omawiają wyniki swojej pracy. Pierwsza część kończy się spostrzeżeniem, że z dowolnie wybranej liczby zapalek nie możemy zbudować trójkąta. Po tej rozmowie stawiamy główne pytanie lekcji: *Jak myślicie, dlaczego z dowolnie wybranej liczby zapalek nie udało się ułożyć trójkąta? Przyjrzyjcie się uważnie zbudowanym przez Was trójkątom i zastanówcie się.* Oczywiście może się zdarzyć, że komuś uda się ułożyć trójkąt z czterech zapalek. Wówczas lekcja staje się jeszcze ciekawsza, bo dochodzi dylemat, kto miał rację. Warto skierować uwagę uczniów na boki trójkąta, prosząc, aby w każdym z nich porównali długość dwóch dowolnie wybranych boków z trzecim bokiem trójkąta.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Uczniowie prezentują wyniki badań na forum klasy. Jak zawsze, gdy prosimy o odkrycie określonej regularności matematycznej, możemy natknąć się na sytuację, w której żadna z grup nie uzyska oczekiwanego rezultatu. Dlatego właśnie dyskusja, którą zawsze proponuję, jest konieczna. To dzięki niej możemy ukierunkować pracę uczniów.

Piąty etap – Odkryłem nieznaną mi dotąd matematykę

Uczniowie wspólnie sformułują wniosek z badań, tj. suma długości dwóch dowolnie wybranych boków trójkąta jest dłuższa niż długość trzeciego boku trójkąta.

Szósty etap – Sprawdź, jak to działa

W tej części zajęć prosimy uczniów, aby narysowali dowolne trójkąty na kartkach, po czym wymienili się między sobą rysunkami. Następnie, aby sprawdzili, czy w narysowanych figurach również zachodzi odkryty przez nich związek miarowy. Ostatnim zadaniem kończącym lekcję będzie projektowanie mostów. Mimo że nie narzucamy uczniom, jak ma wyglądać most, to pewnie znajdą się w nim elementy konstrukcyjne ułożone w kształt trójkąta. To właśnie w nich uczniowie mogą ponownie sprawdzić omawianą na lekcji zależność.

Uwagi

Łatwiejszą wersją powyższej propozycji jest budowanie trójkątów z patyczków o odpowiedniej długości tak, aby nie każde trzy dowolnie wybrane gwarantowały powstanie trójkąta. „Zapałczane” zabawy możemy natomiast prze-dłużyć, budując różne wielokąty i opisując własności otrzymanych figur.

7. Skąd się wzięły liczby?

Komentarz

Początkowo liczbę naturalną postrzegano jako wspólną cechę skończonych zbiorów równolicznych. To właśnie wyizolowanie zbiorów zbudowanych z jednego, dwóch, trzech itd. elementów doprowadziło do wyznaczenia pojęcia „liczba naturalna”. Początkowo pojęcie to wykorzystywano do określania liczby przedmiotów (aspekt kardynalny lub mnogościowy). Jednak szybko okazało się, że dzięki liczbom naturalnym możemy wskazywać kolejność obiektów w szeregu (aspekt porządkowy), opisywać takie wielkości, jak ciężar, długość, pole powierzchni czy objętość (aspekt miarowy). To z kolei było przyczyną powstania liczb wymiernych, ponieważ pojawiła się potrzeba określania części z całości. Na opisaną lekcję proponuję, aby ograniczyć się do aspektu kardynalnego liczby naturalnej i pokierować tak aktywnością uczniów, aby odkryli, że liczba naturalna, a dokładniej liczba elementów, może być jedyną wspólną cechą zaprezentowanych zbiorów.

Pomoce dydaktyczne

Wybór pomocy dydaktycznych w dużej mierze zależy od treści zadań przeznaczonych do rozwiązania, dlatego warto przed zgromadzeniem niezbędnych obiektów ułożyć scenariusz uczniowskiego badania. Niemniej jednak na tych za-

jęciach przydadzą się wszystkie zgromadzone dotychczas w klasie obiekty, które możemy porządkować w zbiory.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Lekcję rozpoczynamy rozmową o liczbach, z którymi nasi uczniowie zetknęli się niejednokrotnie. Staramy się przywołać wszystkie dotychczasowe doświadczenia z nimi związane, pytając: *W jakich sytuacjach natknęliście się na liczby? Do czego wykorzystujemy liczby w życiu codziennym? Jak myślicie, czy moglibyśmy bez nich funkcjonować?*

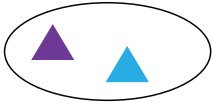
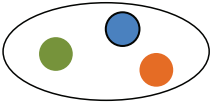
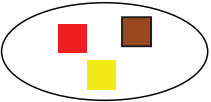
Drugi etap – Widzę sens

Nawiązaniem do tematu zajęć będzie pytanie: *Czy zastanawialiście się, skąd wzięły się liczby?* Oczywiście również w tym wypadku z cierpliwością wysłuchujemy odpowiedzi uczniów, które na tym etapie pozostawiamy bez komentarza.

Trzeci etap – Popróbiję i zobaczę, jak to działa

Uczniowie, pracując w grupach, budują zbiory obiektów o podanych cechach. W tym celu mogą układać w pętlach przygotowane z papieru figury geometryczne, kasztany, guziki, plastikowe nakrętki czy zabawki znajdujące się w klasie. Możemy również skorzystać z klocków Dienesa. Wszystko tak naprawdę zależy od materiału badawczego, którym dysponuje nauczyciel. Jednak najistotniejsze jest takie pokierowanie uczniami, aby mogli wskazać, że jedyną wspólną cechą zbudowanych zbiorów jest liczba elementów znajdujących się w nim. Np.:

Przyjrzyj się uważnie poniższym zbiorom. Jaką cechę uwzględniono, grupując w taki sposób elementy w poszczególnych zbiorach?

			Wspólna cecha – kształt
			

Powyższe zadanie w dużym skrócie pokazuje drogę, którą muszą pokonać uczniowie. Pamiętajmy, że przedstawienie jednego zadania jedynie w formie rysunku na kartce papieru nie jest właściwą drogą postępowania. Czynności, jakie powinni wykonać uczniowie w trakcie lekcji, zdecydowanie przewyższają podany wyżej przykład. Warto dodać, że oprócz odkrycia, skąd wzięły się liczby, zajęcia umożliwiają doskonalenie umiejętności klasyfikacji.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

W tej części zajęć uczniowie prezentują swoje rozwiązania.

Piąty etap – Odkryłem nieznana mi dotąd matematykę

Rozmowa o uzyskanych rezultatach ma doprowadzić uczniów do wniosku, że liczby wymyślili ludzie, ponieważ dzięki nim mogli określać liczbę zgromadzonych obiektów.

Szósty etap – Sprawdź, jak to działa

Prosimy uczniów, aby w parach zastanowili się, w jakich sytuacjach brak liczb wywołałby wiele nieporozumień.

8. Suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie jest dwukrotnie większa od sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie.

Komentarz

Ciekawą lekcją pogłębiającą umiejętność badania własności figur geometrycznych będzie odkrycie, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie jest dwukrotnie mniejsza od sumy miar kątów wewnętrznych w czworokącie. Na proponowanej lekcji nie jest ważna informacja, że suma kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi 180° , a w dowolnym czworokącie 360° . Celem głównym tej lekcji jest wdrażanie uczniów do wnikliwej analizy obiektów geometrycznych, do uwzględniania nie tylko koloru, kształtu i wielkości, ale także do dostrzegania i porównywania elementów obiektów geometrycznych, w naszym przypadku – kątów. Lekcja jest zorganizowana w formie zabawy i równie dobrze może być wykorzystana do porównywania kątów w różnych czworokątach, gdyż po wprowadzeniu mo-

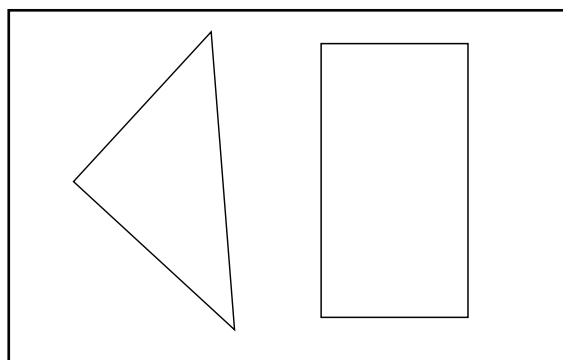
delu kąta prostego łatwo porównać sumę miar kątów wewnętrznych w prostokącie i kwadracie, trudniej natomiast będzie w przypadku innego czworokąta wypukłego.

Pomoce dydaktyczne:

- przygotowane z kolorowego papieru różnej wielkości trójkąty i czworokąty (w tym takie, które nie są prostokątami),
- klej, arkusz szarego papieru, kolorowe kredki i kartki z wydrukowanymi figurami trójkąta i kwadratu

Pierwszy etap – Co już wiem?

Nasze badania będą obejmowały zależności zachodzące pomiędzy elementami, więc warto przeprowadzić rozmowę wstępną na ten właśnie temat. Jednym z najprostszych sposobów będzie podanie dzieciom przygotowanych na kartkach dwóch kształtów: trójkąta i kwadratu. Następnie prosimy, aby na rysunku na czerwono zaznaczyć boki tych figur, na zielono ich wierzchołki, a na niebiesko zacieniować kąty. Jeśli przygotujemy wydruk na kartce A4, ułatwimy sobie prezentację i omawianie dostrzeżonych elementów figury. Oczywiście możemy poprosić uczniów o narysowanie na czystej kartce tych dwóch figur, ale należy im przypomnieć, że chcemy, aby wypełniały całą kartkę (tak jak na poniższym rysunku). Warto o tym pamiętać, bo uczniowie mają tendencję do wykonywania bardzo małych rysunków figur geometrycznych. Po naniesieniu na rysunku kolorów przechodzimy do pytań: *Ile boków ma trójkąt, a ile czworokąt? Która z figur ma więcej wierzchołków i o ile? Która z figur ma trzy kąty, a która cztery?* Wszystkie te pytania mają zwrócić uwagę uczniów na elementy figur geometrycznych i zależności, które między nimi występują.



Drugi etap – Widzę sens

Pytamy uczniów: *Gdybyśmy ze wszystkich kątów w danej figurze zbudowali jeden duży kąt, to który z nich byłby większy – ten powstały z kątów trójkąta czy czworokąta?*

Trzeci etap – Popróbuje i zobaczę, jak to działa

Uczniowie w grupach pracują nad odpowiedzią na postawione przez nauczyciela pytanie. Oczywiście nie narzucamy im, w jaki sposób mają dokonać porównania. Myślę, że wystarczy im podpowiedzieć, że kąty w figurach można odcinać w celu łatwiejszego porównania. Uczniom powinny narzucić się dwa sposoby rozwiązania. Pierwszy to odcięcie kątów w trójkącie i czworokącie, drugi to odcięcie kątów tylko w jednej z figur i przykładanie do kątów drugiej. Sposób rozwiązania jest dowolny.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Po pierwszej części badań oczekujemy, że dzieci wskażą kąty czworokąta jako w sumie dające większy kąt niż w trójkącie. Teraz zależy nam na odkryciu, ile razy ten kąt będzie większy. Stawiamy pytanie: *Jak myślicie, ile razy suma wszystkich kątów w czworokącie jest większa od sumy wszystkich kątów w trójkącie?* Aby znaleźć odpowiedź, uczniowie powinni zbudować kąt powstały ze wszystkich kątów czworokąta i uzupełniać go kątami z trójkątów. Niewykluczone, że już wcześniej to odkrywają, ale zdarzy się to wtedy, gdy postanowią odcinać kąty w dwóch figurach.

Piąty etap – Odkryłem nieznaną mi dotąd matematykę

Po prezentacji przygotowanych prac uczniowie wspólnie formułują wniosek.

Szósty etap – Sprawdzę, jak to działa

Prosimy uczniów, aby narysowali swoje trójkąty i czworokąty, a następnie sprawdzili dla nich odkrytą własność.

9. Dlaczego nie wolno dzielić przez zero?

Komentarz

Gdy zapytałam uczniów pewnej klasy drugiej, dlaczego nie można dzielić przez zero, w odpowiedzi usłyszałam, że pani na lekcji tak powiedziała. Taka odpowiedź w żaden sposób nie jest satysfakcjonująca, nie uwzględnia rozumienia matematyki i jest niezgodna z podejściem do nauczania, które proponuję na stronach niniejszego opracowania. Dlatego myślę, że warto zorganizować lekcję, na której uczniowie przekonają się sami, że dzielenie przez zero jest działaniem niewykonalnym.

Pomoce dydaktyczne:

- obiekty rzeczywiste, które uczniowie będą wykorzystywać do wizualizacji działań.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Na wstępie warto wykonać kilka przykładów na mnożenie i dzielenie. Jednak to nie daje pełnego obrazu dziecięcych doświadczeń, zatem oprócz wykonywania obliczeń należy porozmawiać o relacji, jaka występuje między dzieleniem i mnożeniem.

Drugi etap – Widzę sens

Jak myślicie, czy przez każdą liczbę możemy dzielić?

Trzeci etap – Popróbuję i zobaczę, jak to działa

W tej części lekcji proponuję, aby uczniowie wyznaczali kolejne ilorazy i sprawdzali ich poprawność za pomocą mnożenia. Wśród przykładów powinny znaleźć się też takie, w których dzielnikiem jest liczba zero. Do tej części lekcji przygotowujemy zestaw pomocy dydaktycznych, które będą wspierać uczniów podczas wykonywania działań. Każde działanie, tzn. podział zgromadzonych obiektów na zbiory o danej liczbie elementów (dzielenie przez mieszczące się) czy na wskazaną liczbę zbiorów (dzielenie przez podział) oraz sprawdzenie uzyskanego wyniku za pomocą mnożenia, powinno być wykonane na obiektach.

Trudnością, na którą dzieci mogą się natknąć podczas rozwiązywania zadań, jest iloraz z dzielnikiem równym zero. Bez względu na uczniowskie przypuszczenia o możliwym wyniku takiego dzielenia nie uda im się wykonać sprawdzenia swoich obliczeń za pomocą mnożenia.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Po prezentacji uczniowskich wyników, w tym również dzielenia przez zero, prosimy o sprawdzenie, czy dla innych liczb niż te, które zamieszczono w przykładach, także nie możemy wykonać dzielenia przez zero. Uczniowie zapisują na kartkach swoje przykłady i wymieniają się nimi w grupach. Po ponownym sprawdzeniu wstępnych przypuszczeń formułują (nadal pracując w grupach) wniosek o niewykonalności dzielenia przez zero.

Piąty etap – Odkryłem nieznaną mi dotąd matematykę

Przed prezentacją nowego faktu matematycznego uczniowie, nadal pracując w grupach, tworzą plakaty, które mają przedstawić nowe odkrycie. Zachęcamy uczniów, aby informacje na nich zawarte były zaprezentowane za pomocą rysunku, zapisane symbolami i sformułowane słowami. Takie plakaty są wyeksponowane i omawiane wspólnie z całą klasą.

Szósty etap – Sprawdzę, jak to działa

Warto, aby w tej części lekcji uczniowie spróbowali napisać krótkie opowiadanie matematyczne skierowane do uczniów innej klasy, w którym wyjaśniają, dlaczego nie wolno dzielić przez zero.

10. Kwadrat oraz prostokąt zbudowano z tej samej ilości identycznych kwadratów. Jak myślicie, który z nich będzie miał większy obwód?

Komentarz

Propozycja tej lekcji jest przykładem ilustrującym, w jaki sposób w treści matematyczne we wczesnej edukacji możemy wpleść zadania z optymalizacji.

W starszych klasach takie zadania rozwiązuje się poprzez wyznaczenie odpowiedniego równania funkcji i badanie jej własności, przy czym często możemy zaobserwować mechaniczne wykonywanie kroków według raz przyjętej procedury. Z mechanicznym wykonywaniem procedur możemy również spotkać się w klasach młodszych, np. gdy dzieci dodają do siebie liczby w kolejności ich występowania bez uprzedniej analizy pod kątem wykorzystania własności przemienności lub łączności dodawania. Warto zatem w uproszczonej formie przybliżyć ten typ zadań najmłodszym uczniom.

Cała lekcja opiera się na budowaniu czworokątów z danej liczby kwadratów i wyznaczaniu ich obwodów. Zaskakującym dla dzieci odkryciem jest fakt, że to kwadrat spośród wszystkich zbudowanych prostokątów ma najmniejszy obwód. Kolejną ciekawą własnością, którą również możemy zidentyfikować podczas pracy nad rozwiązaniem, jest zależność między różnicą długości boków prostokąta a jego obwodem.

Pomoce dydaktyczne:

- 36 kwadratowych karteczek z notatnika i kartka na notatki.

Pierwszy etap – Co już wiem?

Wprowadzamy uczniów w tematykę zajęć rozmową o figurach geometrycznych. Koncentrujemy się w szczególności na prostokącie i kwadracie.

Drugi etap – Widzę sens

Wzbudzamy zainteresowanie uczniów specjalnie przygotowaną sytuacją problemową. Prosimy, aby rozstrzygnęli, jakie wymiary powinna mieć prostokątna zagroda dla zwierząt, aby na jej ogrodzenie zużyć jak najmniej drucianej siatki. Powierzchnia zagrody dla zwierząt jest z góry ustalona i możemy ją podzielić na 36 jednakowych kwadratów.

Trzeci etap – Popróbuję i zobaczę, jak to działa

Uczniowie w kilkusobowych grupach projektują zagrodę. Ważnym elementem wspierającym w poszukiwaniu rozwiązania jest przygotowany zestaw 36 kwadratów, z których ma być zbudowana zagroda. Budując prostokątne działki i wyznaczając ich obwody, dzieci muszą wskazać, że kwadrat będzie miał naj-

mniejszy obwód. Prosimy je, aby rysunek każdej ułożonej zagrody wraz z jej wymiarami znalazł się na kartce.

Czwarty etap – Podzielę się swoimi odkryciami

Uczniowie na forum klasy prezentują swoje wyniki. Omawiają figury, które udało im się zbudować, oraz podają ich wymiary. Zawsze w takiej sytuacji sprawdzają się wykonane przez uczniów plakaty, ale nie jest to obowiązek.

Piąty etap – Odkryłem nieznana mi dotąd matematykę

Po prezentacji wszystkich wyników uczniowie wspólnie formułują wniosek.

Szósty etap – Sprawdzę, jak to działa

Ten etap możemy potraktować jako przedłużenie i poprosić uczniów, aby sprawdzili, czy dla 16 lub 64 kwadratów składających się na powierzchnię działki również kwadratowy kształt będzie wymagał najmniejszej ilości siatki ogrodzeniowej.

Uwaga

Myślę, że czytelnik dostrzeże potencjał w proponowanym rozwiązaniu i z łatwością przekształci je, jeśli będzie poszukiwał propozycji lekcji, na której uczniowie będą wyznaczali dzielniki liczb naturalnych.

Wszystkie przedstawione propozycje opierają się na dziecięcych poszukiwaniach w dostępnym im zakresie. Można je określić mianem analogicznych do tych, z którymi mogą się spotkać w starszych klasach, kiedy badając trójkąty prostokątne, odkrywają twierdzenie Pitagorasa, czy analizując podane ciągi liczbowe, wyprowadzają wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego. Jednak działania te różnią się poziomem prowadzenia postępowania badawczego oraz materiałem wykorzystywanym do poszukiwań. Ich charakterystyczną cechą jest konieczność rozważania obiektów rzeczywistych w zaplanowanych sytuacjach dydaktycznych, by następnie na tej podstawie formułować dostrzeżone regularności i budować pierwsze opisy definicyjne, za każdym razem łącząc język potoczny z kształtowanymi pojęciami matematycznymi. Uczniowie mają szansę dyskutować o swoich spostrzeżeniach, rzeczywiście angażować się w odkrycia

matematyczne i przekonać się, że matematyka to nie zbiór zaproponowanych zadań do rozwiązania. Bardzo ważne w kontekście zmiany stosunku społecznego do matematyki jest przekonanie naszych uczniów już na początku nauki szkolnej, że matematyka jest spójna, tworzy całość, że każde kolejne informacje dopełniają i uszczegóławiają poprzednie, pozwalają je łączyć, tworząc pełne struktury wiedzy matematycznej, że wreszcie nie opierają na pamięciowym opanowaniu kolejnych treści matematycznych. Uczenie się następuje w sytuacjach, w których uczniowie nadają znaczenie przyswajanym informacjom, a to nie tylko ukazuje im potrzebę poszerzania wiedzy, ale również czyni ich odpowiedzialnymi za własne struktury umysłowe.

Warto dodać, że wszystkie omówione lekcje tworzą warunki do twórczego uczenia się matematyki, w którym kluczową rolę odgrywa dziecięce rozumowanie. Nie są to lekcje, na których uczniowie korzystają z gotowych algorytmów, automatyzując je poprzez wielokrotne ćwiczenie zadań tego samego typu. Tu nacisk kładzie się na dziecięcą kreatywność w zakresie poszukiwania rozwiązań oraz na wiarygodność zawsze popartą uzasadnieniami. Zakotwiczenie uczniowskiej aktywności w doświadczeniach i dotychczas zgromadzonej wiedzy matematycznej czyni takie podejście twórczym wnioskowaniem opartym na matematyce, które jest uznawane za bardziej wydajne niż tradycyjne podejście do nauczania (Lithner, 2008; Jonsson i in., 2014).

Zamiast podsumowania

Możliwość zaistnienia proponowanego rozwiązania dydaktycznego jest uwarunkowana zmianą nauczycielskiego myślenia o nauczaniu matematyki, koniecznością wyzwolenia się z przeświadczenia o potrzebie wyjaśniania i tłumaczenia matematyki, stopniowym nabieraniem wiary w skuteczność proponowanego rozwiązania oraz przekonania o jego wartości. Niewątpliwie wiąże się to ze wsparciem nauczycieli w formie poradnictwa zawodowego, z kulturą szkoły opartą na dialogu i wspólnym poczuciu realizacji celu, a także umiejętnością współpracy na wszystkich płaszczyznach, w tym również na płaszczyźnie obejmującej relacje uczniowie–nauczyciel. Staralam się pokazać, że nasi najmłodsi uczniowie nie tylko mają zdolność do odkrywania wiedzy matematycznej, ale także prawo, by uczynić ich aktywnymi i świadomymi uczestnikami szkolnego procesu kształcenia. Realizacja niekwestionowanego celu nauczania matematyki, jakim jest inicjowanie i podejmowanie działań wspierających rozwój kompetencji matematycznych, powinna koncentrować się na dbałości o uczniowskie rozumienie nabywanej wiedzy, o rozwój umiejętności osądzania jej użyteczności oraz umiejętności podejmowania działań opartych na regułach matematycznych w niej samej, ale także poza nią (Niss, 2007). Kolejną ważną umiejętnością, którą uczniowie mogą doskonalić w trakcie pracy tą metodą, jest dokonywanie wyborów spośród wielu możliwości i formułowanie na ich podstawie wniosków. Umiejętność rozwiązywania problemów i pogłębianie rozumienia matematyki osiągniemy szybciej, angażując naszych uczniów w działania twórcze, niż trwając przy uczeniu się opartym na algorytmach i procedurach. Aby zapewnić uczniom zamierzone efekty, musimy pozwolić na doświadczanie sytuacji, w których przezwyciężają pewne trudności (Jonsson i in., 2014). Nauczanie skierowane na od-

krywanie wiedzy matematycznej jest właśnie taką konstrukcją, która umożliwia uczniom poszukiwanie odpowiedzi na stawiane pytania i samodzielne dochodzenie do nowej wiedzy. Wszystkie rozważania o odkrywaniu wiedzy matematycznej we wczesnej edukacji koncentrują się na gromadzeniu doświadczeń, które są podstawą własnych konstrukcji umysłowych uczniów. Wczesna edukacja, jako początek przygody z matematyką, wprowadza dzieci w świat konstrukcji pojęć matematycznych oraz kieruje ich uwagę na dostrzeganie i badanie regularności w niej występujących, kształtując przy tym stosunek do tej niełatwej dziedziny wiedzy. Pozbawienie uczniów takiej możliwości często bywa przyczyną początków bezradności matematycznej. A przecież odwaga podejmowania wyzwań, wytrwałość w pokonywaniu trudności i zaspokajanie ciekawości poznawczej usamodzielniają intelektualnie naszych uczniów.

Nauczanie skierowane na odkrywanie wiedzy matematycznej możemy traktować jako propozycję wzbogacającą warsztat metodyczny nauczyciela. W żaden sposób nie neguję potrzeby uczenia się algorytmów czy dążenia do sprawności rachunkowej i wypracowania metod ułatwiających rozwiązywanie zadań. Proponowana metoda stanowi raczej ich uzupełnienie, bo wspiera myślenie, twórczość dziecka i radość z poznawania nowego. Uważam, że wzmacnia uczniów w poszukiwaniu własnych dróg na drodze do matematycznego rozwoju. A oto chyba chodzi w nauczaniu. Najwłaściwszym podsumowaniem wszystkich rozważań poczynionych na stronach niniejszej propozycji będą słowa Andreasa Schleichera: „Jeśli nauczymy nasze dzieci wszystkiego, co sami wiemy, to będą w stanie podążać naszymi śladami. Jeśli jednak nauczymy je, jak się uczyć, to pójdą tam, gdzie same zechcą” (Schleicher, 2019, s. 30). Dajmy naszym uczniom szansę i otwórzmy przed nimi matematykę – niech ją odkrywają.

Bibliografia

- Abrahamson, D., Kapur, M. (2018). Reinventing Discovery Learning: A Field-Wide Research Program. *Instructional Science. An International Journal of the Learning Sciences*, 46.
- Adamek, I. (1996). *Rozwiązywanie problemów przez dzieci*. Kraków: Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej.
- Adamek, I. (2000). *Podstawy edukacji wczesnoszkolnej*. Kraków: Impuls.
- Ajdukiewicz, K. (1960). *Zarys logiki*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.
- Amiyani, R., Widjajanti, J.B. (2018). The Excellence of Guided Discovery Learning on Mathematical Knowledge-Based, Skill-Based, and Attitude. *Journal of Physics: Conference Series*, 1097.
- Anderson, R. (2002). Reforming Science Teaching: What Research Says about Inquiry. *Journal of Science Teacher Education*, 13 (1), 1–12.
- Ashcraft, M.H. (2002). Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current Directions in Psychological Science*, 11 (5), 181–185.
- Beilock, S. (2008). Math Performance in Stressful Situations. *Current Directions in Psychological Science*, 17 (5), 339–343.
- Bereźnicki, F. (2004). *Dydaktyka kształcenia ogólnego*. Kraków: Impuls.
- Bilewicz-Kuźnia, B. (2014). *Edukacja geometryczna dzieci*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.
- Bilewicz-Kuźnia, B. (2018). *Rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.
- Blumenfeld, P.C., Soloway, E., Marx, R.W., Krajcik, J.S., Guzdial, M., Palincsar, A. (1991). Motivating Project-Based Learning: Sustaining the Doing, Supporting the Learning. *Educational Psychologist*, 26 (3–4), 369–398.
- Boaler, J. (2015). *The Elephant in the Classroom. Helping Children Learn and Love Maths*. London: Souvenir Press.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets. Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey-Bass.
- Birch, A. (2007). *Psychologia rozwojowa w zarysie*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Bruner, J.S. (1962). *O poznaniu*. Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy.
- Bruner, J.S. (1971). *O poznawaniu – szkice na lewą rękę*. Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy.
- Bruner, J.S. (1974). *W poszukiwaniu teorii nauczania*. Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy.
- Bruner, J.S. (1978). *Poza dostarczone informacje*. Warszawa: PWN.
- Brzezińska, A. (2000). *Spoleczna psychologia rozwoju*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe „Scholar”.
- Brzezińska, A.I. (2020). *Psychologiczne portrety człowieka. Praktyczna psychologia rozwojowa*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Brzezińska, A., Lutomski, G., Smykowski, B. (1995). *Dziecko wśród rówieśników i dorosłych*. Poznań: Zys i S-ka.
- Bugajska, B. (2006). *Struktura obrazu pojęcia matematycznego*. W: J. Gunčaga, Z. Takáč (red.), *Matematika v škole dnes a zajara*. 7. ročník Konferencie organizovanej s podporou Európskeho sociálneho fondu. Ružomberok: Pedagogical Faculty of Catholic University in Ružomberok.
- Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: MacMillan.
- Cackowska, M. (1993). *Rozwiązywanie zadań tekstowych w klasach I–III*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Carroll, J., Beman, V. (2015). Boys, Inquiry learning Land the Power of Choice in Middle School English Classroom. *Adolescent Success*, 15 (1), 4–17.
- Charles, R., Lester, F. (1982). *Teaching Problem Solving: What, Why, and How*. Palo Alto: Dale Seymour Publications.
- Chodura, S., Kuhn, J.T., Holling, H. (2015). Interventions for Children with Mathematical Difficulties. A Meta-Analysis. *Zeitschrift für Psychologie*, 223 (2), 129–144.
- Cipora, K. (2015). Lęk przed matematyką z perspektywy psychologicznej i edukacyjnej. *Edukacja*, 1 (132), 139–150.
- Clements, D.H. (2001). Mathematics in the Preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7, 270–275.
- Clements, D.H., Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach*. New York: Routledge.
- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. (1990). Classrooms as Learning Environments for Teachers and Researchers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 125–146.
- Copley, J.V. (2004). *Assessing the Mathematical Understanding of the Young Child*. W: J.V. Copley (red.), *Mathematics in the Early Years*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Confrey, J. (1990). What Constructivism Implies for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 107–122.
- Courant, R., Robbins, H., Stewart, I. (1998). *Co to jest matematyka?* Warszawa: Prószyński i S-ka.
- Constantinou, C.P., Tsivitanidou, O.E., Rybska, E. (2018), *What Is Inquiry-Based Science Teaching and Learning?* Pobrano z: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-91406-0_1 (10.07.2021).
- Davis, R.B., Maher, C.A., Noddings, N. (1990). Suggestions for the Improvement of Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 187–191.

- Dąbrowski, M. (2008). *Pozwólmy dzieciom myśleć*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski, M. (2009). *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*. W: M. Dągiel, M. Żytko (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Dąbrowski, M. (2013). *Za trudne, bo trzeba myśleć*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
- Dewey, J. (2014). *Doświadczenie i edukacja*. Warszawa: Warszawska Firma Wydawnicza.
- Dienes Z.P. (1963). *An Experimental Study of Mathematics-Learning*. London: Hunchinson & Co.
- Dixon, J.A. (2005). *Mathematical Problem Solving. The Roles of Exemplar, Schema, and Relational representations*. W: J.I.D. Campbell (red.), *Handbook of Mathematical Cognition*. New York, NY: Psychology Press.
- Donaldson, M. (1986). *Myślenie dzieci*. Warszawa: Wiedza Powszechna.
- Dylak, S. (2013). *Architektura wiedzy w szkole*. Warszawa: Difin.
- Eisenberg, N., Fabes, R.A. (1992). *Emotion, Regulation, and the Development of Social Competence*. W: M.S. Clark (red.), *Emotion and Social Behavior*. Sage Publications.
- Eliot, L. (2003). *Co się tam dzieje? Jak rozwija się mózg i umysł dziecka w pierwszych pięciu latach życia*. Poznań: Media Rodzina.
- English, L., Warren, E. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *The Mathematics Teacher*, 91, 166–170.
- English, L.D. (2004). *Promoting the Development of Young Children's Mathematical and Analogical Reasoning*. W: L. English (red.), *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Faliszewska, J., Lech, G. (2019). *Ja i moja szkoła na nowo. Ćwiczenia dla klasy 3, cz. 3*. Warszawa: Wydawnictwo JUKA-91.
- Fauzi, A., Widjajanti, D.B. (2018). Self-Regulated L: The Effect on Student's Mathematics Achievement. *Journal of Physics: Conference Series*, 1097.
- Filip, J., Rams, T. (2000). *Dziecko w świecie matematyki*. Kraków: Impuls.
- Filipiak, E. (2011). *Z Wygotskim i Brunerem w tle*. Słownik pojęć kluczowych. Bydgoszcz: Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego.
- Filipiak, E., Lemańska-Lewandowska, E. (2015). *Możliwości rozwijania myślenia i uczenia się dzieci poprzez stawianie zadań rozwojowych*. W: E. Filipiak (red.), *Nauczanie rozwijające we wczesnej edukacji według Lwa S. Wygotskiego. Od teorii do zmiany w praktyce*. Bydgoszcz: Agencja Reklamowo-Wydawnicza ArtStudio.
- Finetti de, B. (1983). *Sztuka widzenia w matematyce*. Warszawa: PWN.
- Fisher, R. (1999). *Uczymy jak myśleć*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Gajdzica, Z. (2011). *Sytuacje trudne w opinii nauczycieli klas integracyjnych*. Kraków: Impuls.
- Frobisher, L., Threlfall, J. (1999). *Teaching and Assessing Patterns in Number in Primary Years*. W: A Orton (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.
- Galant, J. (1987). *Dostrzeganie i rozwiązywanie problemów w klasach początkowych*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

- Galant, J. (1994). *Integracja międzyprzedmiotowa w klasach początkowych*. Przemysł: WOM.
- Garrick, R., Threlfall, J., Orton, A. (2005). *Pattern in the Nursery*. W: A. Orton (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Continuum.
- Gierulanka, D. (1958). *O przyswajaniu sobie pojęć geometrycznych*. Warszawa: PWN.
- Gnitecki, J. (2004). *Teoria zintegrowanych zadań szkolnych*. W: Gnitecki J. (red.), *Konstruowanie programów autorskich stymulujących i wspierających rozwój uczniów we współczesnej szkole*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe PTP.
- Gnitecki, J. (2007). *Konstruowanie autorskich programów kształtujących i wspierających rozwój uczniów w okresie wczesnej zmiany formacyjne*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Polskiego Towarzystwa Pedagogicznego.
- Godino, J.D., Batanero, C., Cañadas, G., Contreras, J.M. (2015). *Linking Inquiry and Transmission in Teaching and Learning Mathematics*. CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education.
- Goldin, G.A. (1990). Epistemology, Constructivism, and Discovery Learning in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 31–47.
- Gopnik, A., Meltzoff, A.N., Kuhl, P.K. (2004). *Naukowiec w kołysce. Czego o umyśle uczą nas małe dzieci*. Poznań: Media Rodzina.
- Góralski, A. (1977). *Heurystyka*. W: A. Góralski (red.), *Zadanie, metoda, rozwiązanie, zbiór 1*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Góralski, A. (1989). *Twórcze rozwiązywanie zadań*. Warszawa: PWN.
- Góralski, A. (2002). *Heurystyki heurystyki*. W: K.J. Szmidt, K.T. Piotrowski (red.), *Nowe teorie twórczości. Nowe metody pomocy w tworzeniu*. Kraków: Impuls.
- Góralski, A. (2013). *George'a Polya pedagogika mistrzostwa, czyli o relacji uczeń–mistrz i jej regulach*. Warszawa: Wydawnictwo Akademii Pedagogiki Specjalnej.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1989). *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?* Warszawa: Instytut Wydawniczy Związków Zawodowych.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1992). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2006). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki: przyczyny, diagnoza, zajęcia korekcyjno-kompensacyjne*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2008). *Program wspomaganie rozwoju, wychowania i edukacji starszych przedszkolaków*. Wydanie drugie. Warszawa: Nowa Era.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2009). *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2012). *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2016). O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. *Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze. Matematyczna Edukacja Dzieci*, 1, 5–40.

- Gruszczyk-Kolczyńska, E., Zielińska, E. (1997). *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Guilford, J.P. (1978). *Natura inteligencji człowieka*. Warszawa: PWN.
- Guttmejer, E. (1982). *Rozumienie treści symbolicznych przez dzieci z klas III–V*. Warszawa: PWN.
- Güven, Y., Çolak, G.F. (2019). Difficulties of Early Childhood Education Teachers' in Mathematics Activities. *Acta Didactica Napocensia*, 12 (1), 89–106.
- Hajnicz, W., Konieczna, A. (red) (2013). *Diagnozowanie kompetencji dzieci w procesie edukacyjnym*. Warszawa: Wydawnictwo Akademii Pedagogiki Specjalnej.
- Hanis, J. (1990). Układanie i rozwiązywanie zadań tekstowych metodą „kruszenia”. *Życie Szkoły*, 8, 387–393.
- Hanis, J. (2002). *Matematyka w kształceniu zintegrowanym*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Hanis, J. (2004). *Wesoła szkoła. Matematyka*. Cz. 3. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Hanis, J. (2016). *Matematyka. Metoda pracy w klasach 1–3*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Harper, N., Daane, C. (1998). Causes and Reduction of Math Anxiety in Preservice Elementary Teachers. *Action in Teacher Education*, 19 (4), 29–38.
- Hejny, M. (1997). Rozwój wiedzy matematycznej. *Dydaktyka Matematyki*, 19, 15–28.
- Hinton, V., Strozier, S., Flores, M. (2014). Building Mathematical Fluency for Students with Disabilities or Students at-Risk for Mathematics Failure. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 2 (4), 257–265.
- Huther, G., Hauser, U. (2014). *Wszystkie dzieci są zdolne. Jak marnujemy wrodzone talenty*. Słupsk: Wydawnictwo Dobra Literatura.
- Holt, J. (1964). *How Children Fail*. New York: Pitman.
- Holt, J. (1967). *How Children Learn*. New York: Pitman.
- Ilg, F.L., Ames, L.B., Baker, S.M. (1992). *Rozwój psychiczny dziecka d 0 do 10 lat*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Inhelder, B., Piaget, J. (1970). *Od logiki dziecka do logiki młodzieży. Rozprawa o kształtowaniu się formalnych struktur operacyjnych*. Warszawa: PWN.
- Isiksal, M., Curran, J., Koc, Y., Askun, C. (2009). Mathematics Anxiety and Mathematical Self-Concept: Considerations in Preparing Elementary-School Teachers. *Social Behavior and Personality*, 37 (5), 631–644.
- Jagodzińska, M. (1991). *Obraz w procesach poznania i uczenia się*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Jameson, M.M. (2013). The Development and Validation of the Children's Anxiety in Math Scale. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 31(4), 391–395.
- Jąder, M. (2009). *Efektywne i atrakcyjne metody pracy z dziećmi*. Kraków: Impuls.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., Lithner, J. (2014). Learning Mathematics through Algorithmic and Creative Reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32.

- Kalinowska, A. (2010a). *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją*. Kraków: Impuls.
- Kalinowska, A. (2010b). *Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*. Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
- Kalinowska, A. (2014a). *Poznawczy i kulturowy wymiar dezintegracji wczesnoszkolnych pojęć matematycznych*. W: D. Klus-Stańska (red.), *(Anty)edukacja wczesnoszkolna*. Kraków: Impuls.
- Kalinowska, A. (2014b). Wyniki badań trzecioklasistów jako diagnoza kontekstów nauczania matematyki w klasach najmłodszych. *Ruch Pedagogiczny*, 2, 147–156.
- Kalinowska, A. (2016). Odczarować matematykę. Czy lekcja matematyki może być ciekawa? *Trendy. Internetowe Czasopismo Edukacyjne*, 1.
- Kalinowska, A. (2017). Matematyczna aktywność badawcza uczniów klas początkowych. Między koncepcjami naukowymi a potocznymi. *Problemy Wczesnej Edukacji*, 3, 82–101.
- Kamaluddin, M., Widjajantim D.B. (2019). The Impact of Discovery Learning on Students' Mathematics Learning Outcomes. *Journal of Physics: Conference Series*, 1320,
- Kapur, M., Toh, P.L.L. (2013). *Productive Failure: From an Experimental Effect to a Learning Design*. W: T. Plomp, N. Nieveen (red.), *Educational Design Research – Part B: Illustrative Cases*. Enschede: SLO. Pobrano z: <http://international.slo.nl/bestanden/Ch17.pdf> (15.04.2021).
- Karpiński, M., Zambrowska, M. (2015). *Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
- Kielar-Turska, M. (2006). Defining Emotions in Communicative Situations. *Kolokwia Psychologiczne (Psychological Collquia)*, 15, 125–138.
- Kim, M., Grammer, J., Marylis, L., Carrasco, M., Morrison, F., Gehring, W. (2016). Early Math and Reading Achievement Are Associated with the Error Positivity. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 22, 18–26.
- Klakla, M. (2002). *Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej*. W: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. III. Płock: Novum.
- Klus-Stańska, D. (2000). *Konstruowanie wiedzy w szkole*. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.
- Klus-Stańska, D. (2003). *Wiedza ucznia w nauczaniu*. W: D. Klus-Stańska, M.J. Szymański, M.S. Szymański (red.), *Renesans (?) nauczania całościowego*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Klus-Stańska, D. (2006). *Behawiorystyczne źródła myślenia o nauczaniu, czyli siedem grzechów głównych wczesnej edukacji*. W: D. Klus-Stańska, E. Szatan, D. Bronk (red.), *Wczesna edukacja. Między schematem a poszukiwaniem nowych ujęć teoretyczno-badawczych*. Gdańsk, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.
- Klus-Stańska, D. (2014). *Dezintegracja tożsamości i wiedzy jako proces i efekt edukacji wczesnoszkolnej*. W: D. Klus-Stańska (red.), *(Anty)edukacja wczesnoszkolna*. Kraków: Impuls.
- Klus-Stańska, D. (2018). *Paradygmaty dydaktyki. Myśleć teorią o praktyce*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWB SA.
- Klus-Stańska, D., Kalinowska A. (2004). *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.

- Klus-Stańska, D., Nowicka, M. (2013). *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Kofta, M. (1989). *Orientacja podmiotowa: zarys modelu*. W: M. Kofta (red.), *Wychowanek jako podmiot działań*. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego.
- Konior, J. (2002). *Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie w nauczaniu szkolnym*. W: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. IV. Płock: Novum.
- Korolczuk, R., Zambrowska, M. (2014). *Pozwólmy dzieciom grać*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
- Kowalewska, A. (2010). *Wybrane układy i funkcje organizmu człowieka ważne dla procesów uczenia się*. W: B. Woynarowska, A. Kowalewska, Z. Izdebski, K. Komosińska (red.), *Biomedyczne podstawy kształcenia i wychowania*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Kozielecki, J. (1969). *Rozwiązywanie problemów*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.
- Kozielecki, J. (1992). *Myślenie i rozwiązywanie problemów*. W: T. Tomaszewski (red.), *Psychologia ogólna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Kozłowski, W. (2004). *Twórcze dziecko w szkole*. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
- Krinzinger, H., Kaufmann, L., Willmes, K. (2009). Math Anxiety and Math Ability in Early Primary School Years. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27 (3), 206–225.
- Krygowska, Z. (1969). *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Krygowska, Z. (1977a). *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Krygowska, Z. (1977b). *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 3. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Krygowska, Z. (1986). Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich. *Dydaktyka Matematyki*, 6, 25–41.
- Kujawiński, J. (2010). *Ewolucja szkoły i jej współczesna wizja*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.
- Kujawiński, J. (red.) (1990). *Rozwijanie aktywności twórczej uczniów klas początkowych. Zarys metodyki*. Warszawa: WSiP.
- Ledzińska, M., Czerniawska, E., (2011): *Psychologia nauczania. Ujęcie poznawcze*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Legutko, M. (1996). Matematyczny analfabetyzm funkcjonalny. *Nauczyciele i Matematyka*, 17.
- Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. W: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.
- Ledzińska, M., Czerniawska, E. (2011). *Psychologia nauczania. Ujęcie poznawcze*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Liljedahl, P.G. (2005). Mathematical Discovery and Affect: The Effect of AHA! Experiences on Undergraduate Mathematics Students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36, 219–234.

- Linn, M.C., Pea, R.D., Songer, N.B. (1994). Can Research on Science Learning and Instruction Inform Standards for Science Education? *Journal of Science Education and Technology*, 3 (1), 7–15.
- Linn, M.C., Songer, N.B., Eylon, B.S. (1996). *Shifts and Convergences in Science Learning and Instruction*. W: *Handbook of Educational Psychology*. Riverside, NJ: Macmillan.
- Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 255–276.
- Lockhart, P. (2009). *Mathematician's Lament*. New York: Bellevue Literary Press.
- Lu, J., Bridges, S., Hmelo-Silver, C.E. (2014). *Problem-Based Learning*. W: R.K. Sawyer (red.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Łempicka, Z. (1969). *Mały słownik języka polskiego*. Warszawa: PWN.
- Maarif, S. (2016). Improving Junior High School Students' Mathematical Analogical Ability Using Discovery Learning Method. *International Journal of Research in Education and Science*, 2 (1), 114–124.
- Maher, C.A., Davis, R.B. (1990). Building Representations of Children's Meanings. Journal for Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 79–90.
- Maj-Tatis, B., Swoboda, E. (2018). *Odkrywanie i odwzorowywanie regularności geometrycznych przez uczniów edukacji wczesnoszkolnej*. W: H. Kąkol (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki*, t. 7. Bielsko-Biała: Fundacja Matematyka dla wszystkich.
- Maloney, E.A., Beilock, S.L. (2012). Math Anxiety: Who Has It, Why It Develops, and How to Guard against It. *Trends in Cognitive Sciences*, 16 (8), 404–406.
- Maloney, E.A., Waechter, S., Risko, E.F., Fugelsang, J.A. (2012). Reducing the Sex Difference in Math Anxiety: The Role of Spatial Processing Ability. *Learning and Individual Differences*, 22 (3), 380–384.
- Matczak, A. (1992). *Wprowadzenie do psychologii. Podręcznik dla nauczycieli*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Matczak, A. (2003). *Zarys psychologii rozwoju*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacyjne Żak.
- Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2005). *Matematyczne myślenie*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Maruszewski, T. (2001). *Psychologia poznania*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Mayer, R.E. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? *American Psychologist*, 59 (1), 14–19.
- McGarvey, L.M. (2012). What Is a Pattern? Criteria Used by Teachers and Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 310–337.
- Michalak, R. (2011). *Program nauczania w szkolnej rzeczywistości edukacji elementarnej*. W: H. Sowińska (red.), *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Złożony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.
- Michalak, R., Misiorna, E. (2003). *Nauczyciel i uczeń w zmieniającej się szkole*. W: D. Klus-Stańska, M.J. Szymański, M.S. Szymański (red.), *Renesans (?) nauczania całościowego*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Mitros, K. (2002). *Jak wychować geniusza przez zabawę. Dziecko twórcze i radosne. Sprawdzone sposoby wspomagające wszechstronny rozwój*. Poznań: Wydawnictwo Publicat.

- Mietzel, G. (2003). *Psychologia kształcenia*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Mizińska, J. (1978). *Metoda uniwersalna Kartezjusza*. W: A. Góralski (red.), *Zadanie, metoda, rozwiązanie*, zbiór 2. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Mizińska, J. (1997). *Dialog sokratejski jako metoda heurystyczna*. W: A. Góralski (red.), *Zadanie, metoda, rozwiązanie*, zbiór 1. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Moore, K.D. (2005). *Effective Instructional Strategies: From Theory to Practice*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications. Pobrano z: <https://books.google.pl/> (czerwiec 2021).
- Moroz, H. (1991). *Nasza matematyka. Zabawy i gry dydaktyczne*. Warszawa: Polska Oficyna Wydawnicza BGW.
- Moroz, H. (red.) (2001). *Edukacja zintegrowana w reformowanej szkole*. Kraków: Impuls.
- Mróz, T. (1978). Problemowe nauczanie – uczenie się koniecznym elementem nowoczesnej dydaktyki. *Studia Pedagogiczne*, 4.
- Moszner, Z. (2004). Refleksje na temat kształcenia nauczycieli matematyki. *Dydaktyka Matematyki*, 26, 255–264.
- Mudyń, K. (1995). *O granicach poznania*. Kraków: Impuls.
- Nalaskowski, A. (1998). *Spoleczne uwarunkowania twórczego rozwoju jednostki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- National Research Council (1990). *Reshaping School Mathematics: A Philosophy and Framework for Curriculum*. Washington DC: National Academies Press.
- Nawolska, B. (2011). Rytmy i regularności w matematyce. W: K. Gąsiorek (red.), *Z teorii i praktyki edukacji dziecka: inspiracje dla nauczycieli przedszkoli i klas I–III szkoły podstawowej*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego.
- Nawolska, B., Żądło-Treder, J. (2017). Nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej a matematyka. *Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna*, 5, 121–132.
- Nęcka, E. (1994). *Twórcze rozwiązywanie problemów*. Kraków: Impuls.
- Nęcka, E. (1995). *Proces twórczy i jego ograniczenia*. Kraków: Impuls.
- Nęcka, E. (2012). *Psychologia twórczości*. Sopot: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Nęcka, E., Orzechowski, J., Słabosz, A., Szymura, B. (2005). *Trening twórczości*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Niss, M.A. (2007). *Reflections on the State of and Trends in Research on Mathematics Teaching and Learning: From Here to Utopia*. W: F.K. Lester, Jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, t. 2. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Nosal, C.S. (1990). *Psychologiczne modele umysłu*. Warszawa: PWN.
- Nowak-Łojewska, A. (2004). *Zintegrowane zadania w edukacji wczesnoszkolnej*. Kraków: Impuls.
- Nowecki, B. (2001). *Definicje w nauczaniu geometrii*. W: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. II. Płock: Novum.
- Nowicka, M. (2013). *Szkolna matematyka jako skansen socjalizacji ucznia w klasach młodszych*. W: A. Kalinowska (red.), *Wczesnoszkolna edukacja matematyczna – ograniczenia i ich przełamywanie*. Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.
- Nunes, T., Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwell.

- Okoń, W. (1987). *Nauczanie problemowe we współczesnej szkole*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Okoń, W. (1995). *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Okoń, W. (2001). *Nowy słownik pedagogiczny*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Orton, A., Orton, J. (1999). *Pattern and the Approach to Algebra*. W: A. Orton (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.
- Oszwa, U. (2006). *Rzeczywistość i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatków*. Warszawa: Centrum Metodyczne Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej.
- Oszwa, U. (2017). Wczesna matematyzacja dziecka – czynniki stymulujące i hamujące. *Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna*, 5, 391–402.
- Paulos, J.A. (2005). *Analfabetyzm matematyczny i jego skutki*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.
- Piaget, J. (1966). *Studia z psychologii dziecka*. Warszawa: PWN.
- Piaget, J. (1977a). *Dokąd zmierza edukacja*. Warszawa: PWN.
- Piaget, J. (1977b). *Psychologia i epistemologia*. Warszawa: PWN.
- Piaget, J. (1981). *Równoważenie struktur poznawczych*. Warszawa: PWN.
- Piaget, J., Inhelder B. (1970). *Od logiki dziecka do logiki młodzieży*. Warszawa: PWN.
- Pietrasieński, Z. (1969). *Myślenie twórcze*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.
- Pietrasieński, Z. (1980). *Przygotowanie do aktywności twórczej*. W: B. Suchodolski (red.), *Model wykształconego Polaka*. Wrocław: Ossolineum.
- Pilch, T., Bauman, T. (2001). *Zasady badań pedagogicznych. Strategie ilościowe i jakościowe*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Piłat, R. (2007). *O istocie pojęć*. Warszawa: Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN.
- Pisarski, M. (2017). *Jak wykorzystać metody problemowe w edukacji matematycznej?* Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
- Polya, G. (1975). *Odkrycie matematyczne: o rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Polya, G. (2009). *Jak to rozwiązać?* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Popek, S. (2001). *Człowiek jako jednostka twórcza*. Lublin: Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej.
- Prince, J.M., Felder, M.R. (2006). Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, 95, 123–138.
- Przetacznikowa, M. (1973). *Podstawy rozwoju psychicznego dzieci i młodzieży*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.
- Putkiewicz, Z. (1987). *Podstawowe zagadnienia psychologii*. W: Z. Putkiewicz, B. Dobrowolska, T. Kokołowicz (red.), *Podstawy psychologii, pedagogiki i socjologii*. Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich.
- Pytlak, M. (2011a). *Early Algebraic Reasoning – Discovering Regularities on the Primary School Level*. W: J. Novotna, H. Moraova (red.), *The Mathematical Knowledge Needed for Teaching in Elementary School*. Proceedings of SEMT'11. Prague: Charles University.

- Pytlak, M. (2011b). *Spoleczny charakter uczenia się a budowanie indywidualnej sieci kognitywnych powiązań*. W: H. Kąkol (red.), *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki*. Bielsko-Biała: Koło SNM „Forum Dydaktyków Matematyki”.
- Pytlak, M. (2011c). *Stymulowanie myślenia algebraicznego w środowisku regularności*. W: H. Kąkol (red.), *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki*. Bielsko-Biała: Koło SNM „Forum Dydaktyków Matematyki”.
- Radwiłowicz, R. (1978). *Graficzny zapis zadań*. W: K. Denek, A. Mościcki (red.), *Aktualny stan i potrzeby badań nad strukturyzacją treści kształcenia*. Koszalin: Instytut Kształcenia Nauczycieli i Badań Oświatowych.
- Ramirez, G., Gunderson, E.A., Levine, S.C., Beilock, S.L. (2013). Math Anxiety, Working Memory, and Math Achievement in Early Elementary School. *Journal of Cognition and Development*, 14 (2), 187–202.
- Rams, T. (1982). *Problemy algorytmizacji*. W: I. Gucewicz-Sawicka (red.), *Podstawowe zagadnienia z dydaktyki matematyki*. Warszawa: PAN.
- Reber, A.S., Reber, E.S. (2005). *Słownik psychologii*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar.
- Resnick, L.B. (1987). *Education and Learning to Think*. Washington DC: National Academy Press.
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Henriksson, H.W., Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A New Pedagogy for the Future of Europe*. European Commission Directorate General for Research Information and Communication Unit. Pobrano z: http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf (23.06.2021).
- Saarni, C. (1988). Children's Understanding of the Interpersonal Consequences of Dissemblance of Nonverbal Emotional-Expressive Behavior. *Journal of Nonverbal Behavior*, 12, 275–294.
- Sahara, R., Mardiyana, M., Saputro, D. (2018). Discovery Learning with SAVI Approach in Geometry Learning. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013 (1), 012125.
- Schoenfeld, A.H. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Meta-cognition, and Sense-Making in Mathematics*. W: D. Grouws (red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.
- Schaffer, H.R. (2007). *Psychologia dziecka*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Schleicher, A. (2019). *Edukacja światowej klasy. Jak kształtować systemy szkolne na miarę XXI wieku*. Warszawa: Związek Nauczycielstwa Polskiego.
- Schneider, M., Stern, E. (2013). *Uczenie się z perspektywy poznawczej: dziesięć najważniejszych odkryć*. W: H. Dumont, D. Istance, F. Benavides (red.), *Istota uczenia się. Wykorzystanie wyników badań w praktyce*. Warszawa: Wolters Kluwer.
- Semadeni, Z. (1975). *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci*. Warszawa: PWN.
- Semadeni, Z. (1981). *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 1. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Semadeni, Z. (1984). *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 2. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Semadeni, Z. (2015). *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*. W: Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszcot, M. Czajkowska, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP.

- Semadeni, Z. (2016). *Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.
- Semadeni, Z. (2018). A Comparison of Hejny Levels of the Development of Student's Geometric Thinking with the van Hiele Levels. *Journal of Modern Science*, 2, 45–68.
- Sepehrianazar, F., Babae, A. (2014). Structural Equation Modeling of Relationship between Mathematics Anxieties with Parenting Styles: The Meditational Role of Goal Orientation. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 152, 607–612.
- Shymansky, J.A., Kyle, Jr. W.C., Alport, J.M. (1983). The Effects of New Science Curricula on Student Performance. *Journal of Research in Science Teaching*, 20 (5), 387–404.
- Sierpińska, A., Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Kluwer Academic Publishers.
- Siwek, H. (1985). *Naśladowanie wzorca i dostrzeganie prawidłowości w prostych sytuacjach matematycznych i paramatematycznych przez dzieci upośledzone w stopniu lekkim*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP.
- Siwek, H. (1988). *Układanki*. W: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 4. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne..
- Siwek, H. (2004). *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.
- Siwek, H. (2005). *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*. Warszawa: WSiP.
- Sołowiej, J. (1985). Szkoła w programach stymulacji myślenia twórczego. *Zeszyty Naukowe Wydziału Humanistycznego Uniwersytetu Gdańskiego. Psychologia*, 7.
- Spitzer, M. (2015). *Cyfrowa demencja. W jaki sposób pozbawiamy rozumu siebie i swoje dzieci*. Słupsk: Dobra Literatura.
- Straś-Romanowska, M. (2002). Rozwój człowieka a rozwój osobowy. *Studia Psychologica*, 3, 91–104.
- Steffe, L.P. (1990). On the Knowledge of Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 167–184.
- Strauss, A., Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. Newbury Park, CA: Sage.
- Stein, S.K. (1998). *Potęga liczb. Matematyka w życiu codziennym*. Warszawa: Wydawnictwo Amber.
- Stemplewska, K. (1992). *Rozwój reprezentacji*. W: M. Materska, T. Tysza (red.), *Psychologia i poznanie*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Strykowski, W., Strykowska, J., Pielachowski, J. (2003). *Kompetencje nauczyciela szkoły współczesnej*. Poznań: Wydawnictwo eMPI2.
- Svinicki, M.D. (1998). *A Theoretical Foundation for Discovery Learning*. Pobrano z: journals.physiology.org/journal/advances (2.07.2021).
- Swoboda, E. (2006). *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Swoboda, E., Vighi, P. (2016). *Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries*. Springer.

- Sysło, M.M. (2002). *Algorytmy*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Szewczuk, W. (1985). *Słownik psychologiczny*. Warszawa: Wiedza Powszechna.
- Szmidt, K.J. (1997). *Przewodnik metodyczny dla nauczycieli: Porządek i Przygoda. Lekcje twórczości*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Szmidt, K.J. (2001). *Szkice do pedagogiki twórczości*. Kraków: Impuls.
- Szmidt, K.J. (2013). *Pedagogika twórczości*. Sopot: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Szmidt, K.J., Bonar, J. (1998). *Żywioty. Lekcje twórczości w nauczaniu zintegrowanym*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Szurek, M. (2005). *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, t. 6. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.
- Szymczak, M. (red.) (1978). *Słownik języka polskiego*. Warszawa: PWN.
- Tall, D. (2014). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Tiessen, D., Wild, M., Paige, D.D., Baum, D.L. (1982). *Elementary Mathematical Methods*. New York: Macmillan.
- Tocki, J. (2000). *Struktura procesu kształcenia matematycznego*. Rzeszów: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej.
- Tomaszewski, T. (1976). *Podstawowe formy organizacji i regulacji zachowania*. W: T. Tomaszewski (red.), *Psychologia*. Warszawa: PWN.
- Tomaszewski, T. (1998). *Główne idee współczesnej psychologii*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.
- Trelińska, U., Treliński, G. (1993). *Nauczanie początków geometrii*. Kielce: Eltero.
- Treliński, G. (2004). *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I–III*. Kielce: Wszechnica Świętokrzyska.
- Treliński, G. (2015). *Integracja nauczania – uwarunkowania, praktyka*. W: Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszcot, M. Czajkowska, *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*. Kielce: Wydawnictwo Pedagogiczne ZNP.
- Trempała, J. (2011). *Psychologia rozwoju człowieka*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Treize, K., Reeve, R. (2014). Cognition-Emotion Interactions: Patterns of Change and Implications for Math Problem Solving. *Frontiers in Psychology*, 5, 1–15.
- Turnau, S. (1988). *Ornamenty*. W: Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 4. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Turnau, S. (1990). *Wykłady o nauczaniu matematyki*. Warszawa: PWN.
- Tyszkowa, M. (1988). *Rozwój psychiczny jednostki jako proces strukturalizacji i restrukturalizacji doświadczenia*. W: M. Tyszkowa (red.), *Rozwój psychiczny człowieka w ciągu życia. Zagadnienia teoretyczne i metodologiczne*. Warszawa: PWN.
- Urbańska, E. (1996). Przykłady trudności i błędów w kształtowaniu pojęć i praw matematycznych w klasach początkowych. *Problemy Studiów Nauczycielskich*, 6.
- Von Glasersfeld, E. (1987). *Preliminaries to Any Theory of Representation*. W: C. Janvier (red.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Vukovic, R., Roberts, S., Wright, L.G. (2013). From Parental Involvement to Children's Mathematical Performance: The Role of Mathematics Anxiety. *Early Education and Development*, 24, 446–467.
- Wadsworth, B.J. (1998). *Teoria Piageta. Poznawczy i emocjonalny rozwój dziecka*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
- Wasilewska, A. (2014). *Diagnozowanie i wspieranie myślenia twórczego – zaniedbany obszar edukacji wczesnoszkolnej*. W: B. Niemierko, M.K. Szmigiel (red.), *Diagnozy edukacyjne: dorobek i nowe zadania*. XX Krajowa Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, Gdańsk, 18–20 września 2014 r.
- Westwood, P. (2008). *What Teachers Need to Know About Teaching Methods*. Pobrano z: https://issuu.com/tacapsstaff/docs/what_teachers_need_to_know_about_te (10.07.2021).
- Więckowski, R. (1972). *Intensyfikacja pracy uczniów w nauczaniu początkowym*. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.
- Włodarski, Z. (1993). *Nauczanie – mechanizmy psychologiczne*. W: W. Pomykało (red.), *Encyklopedia pedagogiczna*. Warszawa: Fundacja Innowacja.
- Włodarski, Z., Hankała, A. (2004). *Nauczanie i wychowanie jako stymulacja rozwoju człowieka*. Kraków: Impuls.
- Wojnowska, M. (1987). *O rozumieniu matematyki (próba zbudowania kryterium rozumienia)*. W: H. Moroz (red.), *Wybrane problemy pedagogiki wczesnoszkolnej*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- Wojnowska, M. (1989). *Brunerowska koncepcja reprezentacji jako narzędzie planowania sytuacji dydaktycznych, zorientowanych na kształtowanie pojęć matematycznych w klasach początkowych*. W: H. Moroz (red.), *Sytuacje dydaktyczne w klasach I–III*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- Wojnowska, M. (1992). *Rozwój operacji kombinatorycznych a osiągnięcia matematyczne uczniów klas początkowych*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- Wojnowska, M. (1996). *Edukacja matematyczna jako narzędzie wspomagania rozwoju poznawczego dziecka*. W: H. Moroz (red.), *Edukacja dla rozwoju*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.
- Wojnowska, M. (2001). *Integracja w edukacji wczesnoszkolnej – typy możliwe?* W: H. Moroz (red.), *Edukacja zintegrowana w reformowanej szkole*. Kraków: Impuls.
- Wołoszynowa, L. (1975). *Młodszy wiek szkolny*. W: M. Żebrowska (red.), *Psychologia dzieci i młodzieży*. Warszawa: PWN.
- Wood, D. (2006). *Jak dzieci uczą się i myślą? Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Wu, S., Barth, M., Amin, H., Malcarne, V., Menon, V. (2012). Math Anxiety in Second and Third Graders and Its Relation to Mathematics Achievement. *Frontiers in Psychology*. Pobrano z: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2012.00162/full>, 09.06.2021 (10.06.2021).
- Wygotski, L.S. (1971). *Problem nauczania i rozwoju umysłowego w wieku szkolnym*. W: L.S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*. Warszawa: PWN.
- Wygotski, L.S. (1978). *Narzędzie i znak w rozwoju dziecka*. Warszawa: PWN.
- Wygotski, L.S. (1989). *Myślenie i mowa*. Warszawa: PWN.

- Wygotski, L.S. (1995). *Wczesne dzieciństwo*. W: A. Brzezińska, G. Lutomski, T. Czub, B. Smykowski (red.), *Dziecko w zabawie i w świecie języka*. Poznań: Zysk i S-ka.
- Wygotski, L.S. (2002). *Wybrane prace psychologiczne II. Dzieciństwo i dorastanie*. Poznań: Zysk i S-ka.
- Yuliani, K., Saragih, S. (2015). The Development of Learning Devices Based Guided Discovery Model to Improve Understanding Concept and Critical Thinking Mathematically Ability of Students at Islamic Junior High School of Medan. *Journal of Education and Practice*, 6 (24), 116–128.
- Yurniwati, Y., Hanum, L. (2017). Improving Mathematics Achievement of Indonesian 5th Grade Students through Guided Discovery Learning. *Journal on Mathematics Education*, 8 (1), 77–84.
- Zarzycki, P. (2019). *Modelowanie pojęć matematycznych*. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.
- Zazkis, R., Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379–402.
- Zimbardo, P.G. (1999). *Psychologia i życie*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Żytko, M. (2021). *Edukacja matematyczna – działanie, odkrywanie, mówienie w praktycznym kontekście*. Pobrano z: <http://matematykawkolorach.edukacjananowo.pl/edukacja-matematyczna-dzialanie-odkrywanie-mowienie-w-praktycznym-kontekście> (9.03.2021).

Summary

Teaching aimed at discovering mathematics is not a new methodical solution, albeit still unpopular in modern educational practices. Lessons built on this approach are wholly focused on students' actions. Through working on problems, the learners discover laws and principles of mathematics, relationships and dependencies between mathematical objects and formulate mathematical concepts. The proposed method is characterized by the reversal of active roles between lesson's participants. The students are the ones more engaged, while teachers accompany them in the learning process. The construction of this paper leads the reader through three chapters, focusing consecutively on children's cognitive abilities and different views on their development, the act of discovering mathematics itself and finally on a description of teaching methods that favour children's discoveries. Besides the theoretical basis of teaching aimed at discovering mathematics, the paper lays down advantages and disadvantages of the practice that appear in the subject's literature. It also proposes a construction of a lesson in this method, illustrated with examples of mathematical classes for students in primary education.

Nauczanie ukierunkowane na odkrywanie wiedzy matematycznej nie jest nowym rozwiązaniem metodycznym, ale wciąż mało popularnym we współczesnej praktyce edukacyjnej. Lekcje budowane w tym podejściu od początku do końca są poświęcone działaniom uczniów, którzy w toku realizacji zadań odkrywają prawa i reguły matematyczne, związki i zależności między obiektami matematycznymi, a także kształtują nowe pojęcia. Proponowane rozwiązanie cechuje zwrot aktywności uczestników lekcji. Stroną aktywną stają się uczniowie, a nauczyciele towarzyszą im w procesie poznania. Niestety proponowane rozwiązanie dydaktyczne ma również swoje wady. Wymaga od nauczycieli nie tylko wiedzy merytorycznej z zakresu matematyki, znajomości charakterystycznych cech rozwojowych dziecka oraz umiejętności metodycznych w zakresie planowania i organizacji pracy na lekcji, ale również czasu i nakładu pracy, jaki muszą przeznaczyć oni na przygotowanie zajęć. Czy warto podjąć ten trud? Myślę, że tak.

W opracowaniu skoncentrowano się kolejno na możliwościach poznawczych dziecka i poglądach na ich rozwój, samym akcie odkrywania wiedzy matematycznej, aż po scharakteryzowanie nauczania sprzyjającego dziecięcym odkryciom. Całość rozważań teoretycznych zakończona jest propozycją konstrukcji lekcji, zilustrowaną przykładami zajęć matematycznych dla uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym.

Lidia Pawlusińska



71-101 Szczecin, ul. Mickiewicza 64
tel. 91 444 20 06, 91 444 20 09
e-mail: wydawnictwo@usz.edu.pl
www.wn.usz.edu.pl

ISBN 978-83-7972-784-1 (online)
ISBN 978-83-7972-515-1 (print)



9 788379 725151