UNIWERSYTET SZCZECIŃSKI
WYDZIAŁ NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA

Studia i Prace WNEiZ US
nr 45/1 2016

DOI: 10.18276/sip.2016.45/1-14

Kamila Bednarz-Okrzyńska*
Uniwersytet Szczeciński

ANALIZA ZALEŻNOŚCI MIĘDZY WARTOŚCIĄ WSPÓŁCZYNNIKA ASYMETRII A WARTOŚCIĄ SEMIODCHYLENIA STANDARDOWEGO STÓP ZWROTU WYBRANYCH INDEKSÓW GIEŁDOWYCH I SPÓŁEK

Streszczenie

W opracowaniu wykonano analizę wartości semiodchylenia standardowego oraz wartości współczynnika asymetrii dla stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 oraz wybranych indeksów giełdowych za lata 2010–2013. W miejsce semiodchylenia standardowego wprowadzono zmienną $s = \sigma - \sqrt{2} \cdot SV$ będącą miarą asymetrii rozkładu. W celu potwierdzenia liniowej zależności między zmienną s a współczynnikiem asymetrii przeprowadzono test t-Studenta. Następnie oszacowano parametry liniowej funkcji regresji, a także wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona. W celu oceny jakości wyznaczonego modelu obliczony został współczynnik determinacji liniowej. Istotność statystyczna parametrów strukturalnych została zbadana statystyką t-Studenta.

Słowa kluczowe: analiza regresji, współczynnik asymetrii, semiodchylenie standardowe, stopa zwrotu

Wstęp

Inwestowanie jest niezmiernie ważnym rodzajem działalności w życiu gospodarczym człowieka. W gospodarce rynkowej inwestycje postrzegane są jako niezbędny warunek rozwoju tej gospodarki.

* Adres e-mail: kamila.bednarz@wzieu.pl.

Elementami nierozerwalnie związanymi z działalnością inwestorów na całym rynku kapitałowym są niepewność i ryzyko. Ryzyko może być mierzone trzema głównymi, szczegółowo opisanymi w literaturze przedmiotu rodzajami miar: wrażliwości, zagrożenia i zmienności. Klasyczną i najstarszą grupą miar ryzyka są miary zmienności. Odzwierciedlają one stopień rozproszenia stóp zwrotu wokół wartości oczekiwanej lub średniej. Miary zmienności oparte są na założeniu, że ryzyko inwestycyjne rośnie, gdy zwiększa się zmienność stopy zwrotu, i odwrotnie.

Do klasycznych miar zmienności, o największym znaczeniu praktycznym, zalicza się wariancję stopy zwrotu i odchylenie standardowe stopy zwrotu. Na podstawie rozproszenia zmiennych wyjściowych za pomocą odpowiednich miar statystycznych (np. rozstęp, współczynnik asymetrii, miary skupienia) dokonuje się oceny ryzyka.

W opracowaniu wykonano analizę wartości semiodchylenia standardowego oraz wartości współczynnika asymetrii dla stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 i wybranych indeksów giełdowych za lata 2010–2013 w celu ustalenia związków zachodzących między tymi parametrami.

Asymetrię opisuje moment standaryzowany trzeciego rzędu (Sobczyk, 2004, s. 59):

$$AS = \frac{M_3}{\left(V(X)\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

gdzie:

$\hat{M}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^3$ – estymator momentu centralnego trzeciego rzędu,

$V(X)$ – wariancja.

Wyrażenie opisane wzorem (1) nosi nazwę współczynnika asymetrii (Fisz, 1969, s. 84).

Dla rozkładów symetrycznych (np. rozkład normalny, rozkład Laplace'a) współczynnik asymetrii równa się zero ($AS = 0$).

W publikacji wykorzystano wzór określający asymetrię A, uwzględniający liczebność próbki n (Tarczyński, 2002, s. 46):

$$A = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \cdot AS \tag{2}$$

gdzie AS określa wzór (1).

Ze wzoru (2) wynika, że $A > AS$. Gdy liczebność próbki dąży do nieskończoności, to $A \to AS$.

Współczynnik asymetrii informuje o sile i kierunku asymetrii rozkładu. Po obliczeniu jego wartości można uzyskać informację o tym, w którym z wariantów istnieje przewaga możliwych do osiągnięcia wyników lepszych (o mniejszym ryzyku) niż przeciętna wartość ryzyka wyznaczona dla całego projektu. Wskaźnik asymetrii większy od zera świadczy o asymetrii prawostronnej. Jest to korzystne dla inwestorów, ponieważ oznacza duże prawdopodobieństwo osiągnięcia wyższej stopy zwrotu niż przeciętna wartość wyznaczona dla całego projektu.

Wykorzystanie współczynnika asymetrii jako miary ryzyka jest rozszerzeniem zasady maksimum zysku przy minimum ryzyka o zasadę maksymalnej skośności. Racjonalne inwestowanie powinno prowadzić do maksymalizacji stopy zwrotu, minimalizacji ryzyka i maksymalizacji prawostronnej asymetrii.

W odchyleniu standardowym akcji ryzyko jest określane na podstawie odchylenia możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu. Przy takim określeniu ryzyka są jednakowo traktowane odchylenia dodatnie i ujemne, a przecież odchylenie dodatnie oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu jest wyższa niż wartość oczekiwana, co jest z korzyścią dla inwestora. Natomiast wystąpienie odchylenia ujemnego oznacza, że stopa zwrotu jest mniejsza niż oczekiwana, co jest prawdziwym wyznacznikiem ryzyka dla inwestora. Przyjmując, że ryzyko powinno być określane na podstawie tylko elementów niepożądanych przez inwestora, czyli ujemnych odchyleń od oczekiwanej stopy zwrotu, za miarę ryzyka należy uznać semiodchylenie standardowe akcji *SV*, które uwzględnia jedynie przypadki, kiedy stopa zwrotu x_i spełnia zależność $x_i < \bar{x}$, to znaczy:

$$SV = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 d_i} \tag{3}$$

gdzie $d_i = \begin{cases} 0 & dla \quad x_i \geq \bar{x} \\ 1 & dla \quad x_i < \bar{x} \end{cases}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Porównanie odchyleń standardowych z semiodchyleniami standardowymi wyznaczonymi dla tych samych danych może posłużyć jako informacja, czy rozkład analizowanych stóp zwrotu jest symetryczny. Jeżeli rozkład stopy zwrotu jest symetryczny, to odchylenie standardowe jest $\sqrt{2}$ razy większe od semiodchylenia standardowego. W przypadku rozkładu symetrycznego wzrasta prawdopodobieństwo, że rozkład stopy zwrotu papieru wartościowego jest normalny lub zbliżony do normalnego.

Jeszcze inne zastosowanie semiodchylenia standardowego polega na różnicowaniu akcji o jednakowym odchyleniu standardowym. Z dwóch akcji o takim samym odchyleniu należy wybrać tę, dla której jest niższe semiodchylenie standardowe, czyli jest mniejsze ryzyko zajścia niekorzystnej sytuacji dla inwestora.

Uwzględniając, że dla rozkładu symetrycznego zachodzi:

$$\sigma = \sqrt{2} \cdot SV \tag{4}$$

gdzie:
σ – odchylenie standardowe,
SV – semiodchylenie standardowe,
wprowadza się miernik

$$s = \sigma - \sqrt{2} \cdot SV \tag{5}$$

będący miarą asymetrii rozkładu. Dla rozkładu symetrycznego miernik ten równa się zero.

Celem publikacji jest wykazanie istotnej statystycznie zależności zachodzącej między współczynnikiem asymetrii A a zmienną s. Na tej podstawie zostanie wykonana ocena obydwu mierników (A i s) z punktu widzenia praktycznego wykorzystania przez inwestora.

1. Wyniki obliczeń dla spółek wchodzących w skład indeksu WIG20

Przeprowadzono test t-Studenta, który potwierdził liniową zależność między miernikiem s a współczynnikiem asymetrii A (Zeliaś, 1997, s. 78):

$$s_i = a + b \cdot A_i + \varepsilon_i \tag{6}$$

gdzie ε_i to składnik losowy.

Równanie (6) zostało wyznaczone dla stóp zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 (i = 1, 2, …, 76), a także dla wybranych indeksów giełdowych (i = 1, 2, …, 16).

Parametry liniowej regresji wyznaczono ze wzorów:

$$b = \frac{\text{cov}(A, s)}{\text{var}(A)}; \; a = \overline{s} - b \cdot \overline{A} \tag{7}$$

gdzie:
$\overline{A}$ – wartość średnia asymetrii,
$\overline{s}$ – wartość średnia zmiennej s.

W pierwszej kolejności uwzględniono wartości dziennych stóp zwrotu z akcji spółek wchodzących w skład indeksu WIG20, uzyskując:

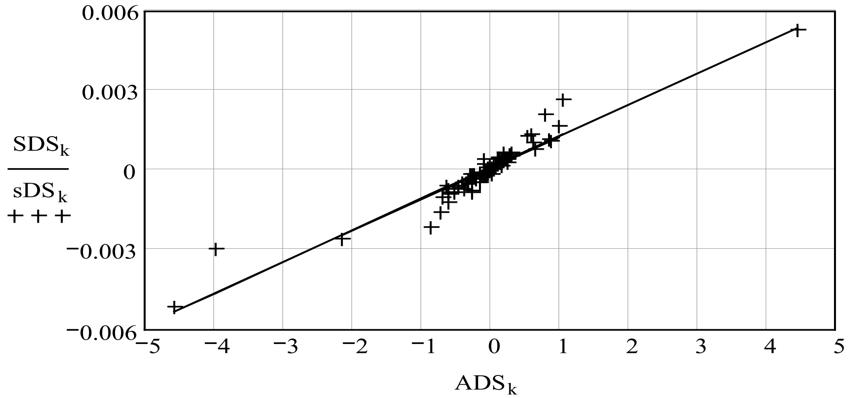
$$SDS_k = 0{,}000087 + 0{,}001184 \cdot ADS_k \tag{8}$$

gdzie:

ADS_k – wartości współczynnika asymetrii stopy zwrotu spółek dla danych dziennych,

SDS_k – zależność teoretyczna dla zmiennej s.

Rysunek 1. Wynik regresji liniowej między zmienną sDS a asymetrią ADS dla spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 – dane dzienne za okres 2010–2013. Obserwacje sDS_k (n = 76) – plusy; zależność teoretyczna SDS_k – linia ciągła



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 przedstawiono wynik regresji liniowej między zmienną sDS (wartości empiryczne zaznaczone za pomocą plusów) a asymetrią ADS dla spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 – dane dzienne za okres 2010–2013.

Ponadto wyznaczono współczynnik korelacji Pearsona ρds :

$$\rho ds = 0{,}947 > \rho_{kr}(76) = 0{,}226 \tag{9}$$

gdzie $\rho_{kr}(n)$ to wartość krytyczna współczynnika korelacji.

Ze wzoru (9) wynika, że zachodzi istotna zależność między zmienną s a współczynnikiem asymetrii. Współczynnik determinacji wynosi $\rho ds^2 = 0{,}896$.

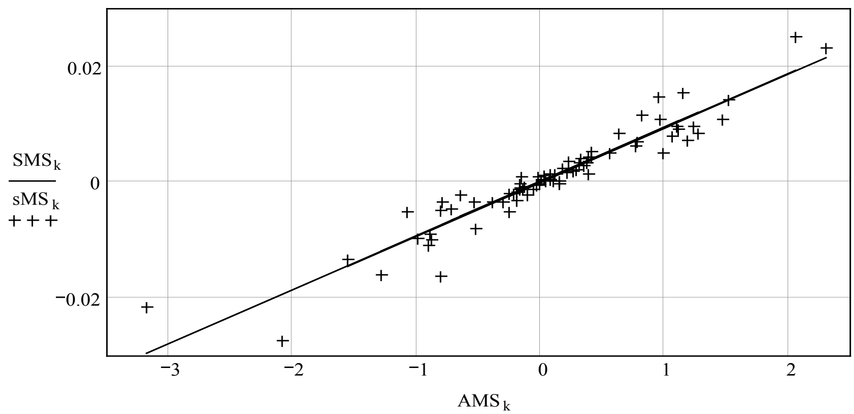
Następnie rozpatrzono dane miesięcznych stóp zwrotu spółek wchodzących w skład indeksu WIG20. Na podstawie wzoru (7) uzyskano:

$$SMS_k = 0{,}000053 + 0{,}00935 \cdot AMS_k \tag{10}$$

gdzie:
AMS_k – wartości współczynnika asymetrii stopy zwrotu spółek dla danych miesięcznych,
SMS_k – zależność teoretyczna dla zmiennej *s*.

Na rysunku 2 przedstawiono wynik regresji liniowej między zmienną sMS (wartości empiryczne zaznaczone za pomocą plusów) a asymetrią *AMS* dla spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 – dane miesięczne za okres 2010–2013.

Rysunek 2. Wynik regresji liniowej między zmienną sMS a asymetrią AMS dla spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 – dane miesięczne za okres 2010–2013. Obserwacje sMS_k – plusy; zależność teoretyczna SMS_k – linia ciągła



Źródło: opracowanie własne.

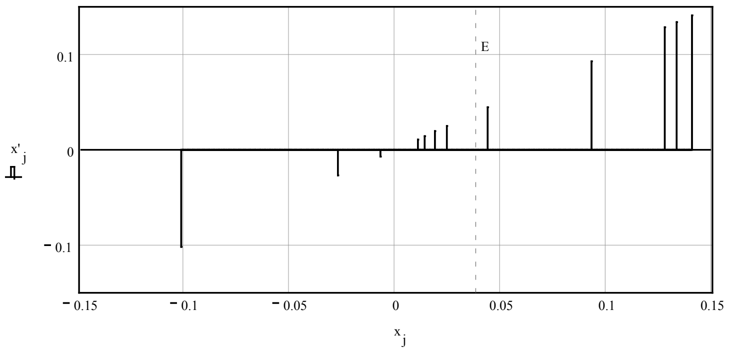
Współczynnik korelacji wynosi:

$$\rho ms = 0{,}951 > \rho_{kr}(76) = 0{,}226 \tag{11}$$

co oznacza, że zachodzi istotna zależność między zmienną *s* a współczynnikiem asymetrii. Współczynnik determinacji wynosi $\rho ms^2 = 0{,}904$, czyli jest nieznacznie większy niż współczynnik determinacji uzyskany dla danych dziennych $\rho ds^2 = 0{,}896$.

Analizując wyniki uzyskane dla danych miesięcznych dotyczących 2013 roku, stwierdzono, że dla spółki mBank uzyskuje się $\sigma = 0{,}06979$, $\sqrt{2} \cdot SV = 0{,}06893$, a stąd $s = \sigma - \sqrt{2}SV = 0{,}00085$. Natomiast ze wzoru (2) uzyskano $A = -0{,}165$. Oznacza to przeciwne znaki dla zmiennej *s* oraz współczynnika asymetrii *A*.

Rysunek 3. Uporządkowane wartości miesięcznej stopy zwrotu spółki mBank w 2013 roku. Na rysunku zaznaczono roczną wartość średnią $E = 0{,}0387$



$$X = \begin{pmatrix} -0.1023 \\ -0.0278 \\ -0.0077 \\ 0.0105 \\ 0.0133 \\ 0.0183 \\ 0.0236 \\ 0.0433 \\ 0.0922 \\ 0.1274 \\ 0.1331 \\ 0.1399 \end{pmatrix}$$

Źródło: opracowanie własne.

Zasadnicze znaczenie przy obliczaniu współczynnika asymetrii ma najmniejsza wartość stopy zwrotu $X = -0{,}1023$ – we wzorze (1) występuje trzecia potęga różnicy $(X - E)^3$. W przypadku semiodchylenia standardowego wymieniona stopa zwrotu odgrywa mniejszą rolę ze względu na niższą potęgę różnicy $(X - E)^2$ występującą we wzorze (3). Może to stanowić wytłumaczenie zaobserwowanego faktu różnicy znaków s i A.

2. Wyniki obliczeń dla wybranych indeksów giełdowych

Kolejno rozpatrzono dane odnoszące się do dziennych stóp zwrotu indeksów giełdowych: WIG, MWIG20, MWIG40, SWIG80. Na podstawie wzoru (7) uzyskano:

$$SDI_m = -0{,}0000031 + 0{,}0011 \cdot ADI_m \tag{12}$$

gdzie:
ADI_m – wartości współczynnika asymetrii stopy zwrotu indeksów giełdowych dla danych dziennych,
SDI_m – zależność teoretyczna dla zmiennej s.

Na rysunku 4 przedstawiono wynik regresji liniowej między zmienną sDI (wartości empiryczne zaznaczone za pomocą prostokątów) a asymetrią ADI dla zwrotu indeksów giełdowych: WIG, MWIG20, MWIG40, SWIG80 – dane dzienne za okres 2010–2013.

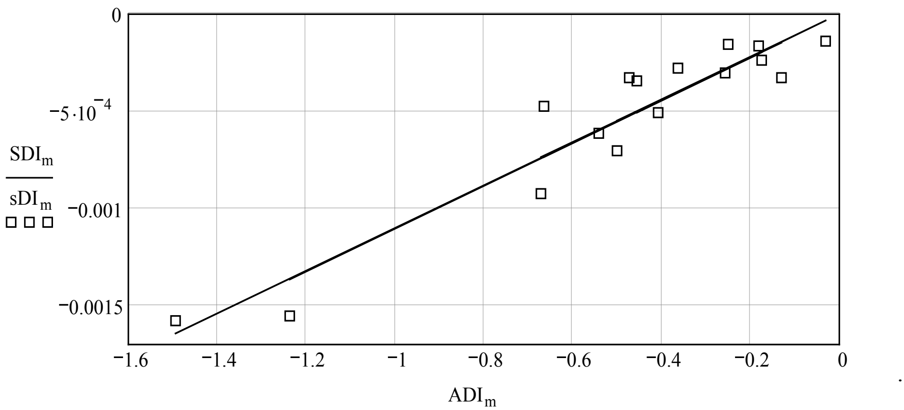
Z rysunku 4 wynika, że współczynnik asymetrii *ADI* przyjmuje tylko wartości ujemne.

Współczynnik korelacji wynosi:

$$\rho di = 0{,}948 > \rho_{kr}(16) = 0{,}497 \tag{13}$$

co oznacza, że zachodzi istotna zależność między zmienną *s* a współczynnikiem asymetrii. Współczynnik determinacji wynosi $\rho di^2 = 0{,}899$.

Rysunek 4. Wynik regresji liniowej między zmienną sDI a asymetrią *ADI* dla stóp zwrotu indeksów giełdowych: WIG, MWIG20, MWIG40, SWIG80 – dane dzienne za okres 2010–2013. Obserwacje sDI_m (*n* = 16) – prostokąty; zależność teoretyczna SDI_m – linia ciągła



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 5 przedstawiono wynik regresji liniowej między zmienną sMI (wartości empiryczne zaznaczone za pomocą prostokątów) a asymetrią *AMI* dla stóp zwrotu indeksów giełdowych: WIG, MWIG20, MWIG40, SWIG80 – dane miesięczne za okres 2010–2013.

Na podstawie wzoru (7) otrzymuje się

$$SMI_m = 0{,}00014 + 0{,}006839 \cdot AMI_m \tag{14}$$

gdzie:

AMI_m – wartości współczynnika asymetrii stopy zwrotu indeksów giełdowych dla danych miesięcznych,

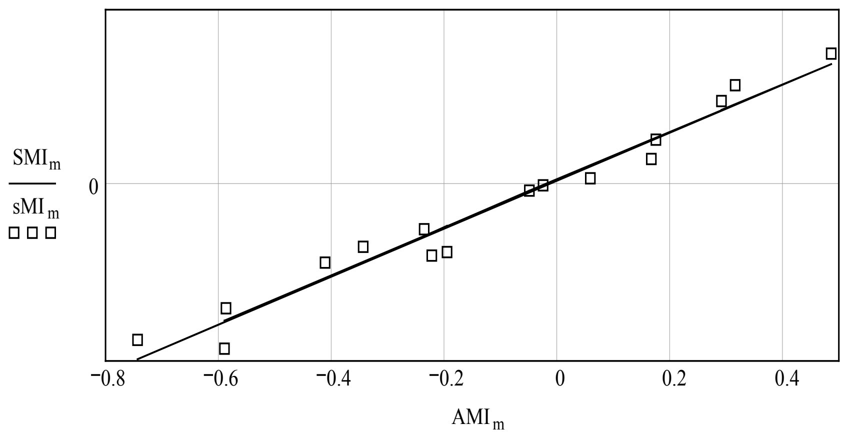
SMI_m – zależność teoretyczna dla zmiennej *s*.

Współczynnik korelacji wynosi:

$$\rho mi = 0{,}983 > \rho_{kr}(16) = 0{,}497 \tag{15}$$

co oznacza, że zachodzi istotna zależność między zmienną *s* a współczynnikiem asymetrii. Współczynnik determinacji wynosi $\rho mi^2 = 0{,}965$.

Rysunek 5. Wynik regresji liniowej między zmienną sMI a asymetrią *AMI* dla stóp zwrotu indeksów giełdowych: WIG, MWIG20, MWIG40, SWIG80 – dane miesięczne za okres 2010–2013. Obserwacje sMI_m (*n* = 16) – plusy; zależność teoretyczna SMI_m – linia ciągła



Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

W tabeli 1 zamieszczono wyniki (parametry regresji liniowej, wartości statystyki *t*, wartości współczynnika korelacji Pearsona, *p*-value) dotyczące zależności statystycznych zachodzących między zmienną *s* a współczynnikiem asymetrii.

Dla przypadków zamieszczonych w tabeli 1 przeprowadzono test liniowości trendu. Dla wszystkich czterech przypadków uzyskano potwierdzenie hipotezy, iż zależności spełniają warunek trendu liniowego.

Odnośnie do testu istotności to parametr b (współczynnik regresji) był istotny na poziomie 10^{-15}. Natomiast wyraz wolny a okazał się być nieistotny. Analogiczną sytuację można odnotować w pracy (Domański, 1990, s. 186), gdzie wyznaczono równanie linii regresji zawierające nieistotny wyraz wolny oraz istotny współczynnik regresji b.

Wartość współczynnika korelacji należy odnieść do wartości krytycznej, mianowicie korelacja jest istotna, jeżeli $\rho > \rho_{kr}(n)$ lub $\frac{\rho}{\rho_{kr}(n)} > 1$. W związku z powyższym została zamieszczona kolumna 6 zawierająca wartość stosunku $\frac{\rho}{\rho_{kr}(n)}$.

Z tabeli 1 wynika, że wartość współczynnika korelacji między zmienną s (wzór (5)) a współczynnikiem asymetrii dla danych dotyczących spółek (lp. 1, 2) zawiera się w przedziale [0,936–0,951], natomiast dla danych dotyczących indeksów giełdowych (lp. 3, 4) wartości są nieco większe – przedział wynosi [0,948–0,983]. W przypadku ilorazu $\frac{\rho}{\rho_{kr}(n)}$ (kolumna 6) sytuacja się odwraca. Mianowicie, mniejsze wartości ilorazu występują dla indeksów giełdowych [1,907; 1,978] a większe dla danych dotyczących spółek: [4,142; 4,208].

Tabela 1. Parametry regresji liniowej oraz wartości współczynnika korelacji Pearsona między zmienną s (wzór (5)) a współczynnikiem asymetrii

Lp.	Rodzaj danych	Parametr a (wynik testu t-Studenta)	Parametr b (wynik testu t-Studenta)	Wartość współczynnika ρ	Wartość krytyczna $\rho_{kr}(n)$	Iloraz $\frac{\rho}{\rho_{kr}(n)}$	p-value
1.	Dzienne, spółki, $n = 76$	0,000069 (1,379)	0,001169 (22,896)*	0,936	0,226	4,142	0,0000
2.	Miesięczne, spółki, $n = 76$	0,000053 (0,174)	0,00935 (26,444)*	0,951	0,226	4,208	0,0000
3.	Dzienne, indeksy giełdowe, $n = 16$	–0,000003 (0,05)	0,00110 (11,191)*	0,948	0,497	1,907	0,0000
4.	Miesięczne, indeksy giełdowe, $n = 16$	0,00014 (1,063)	0,006839 (19,75)*	0,983	0,497	1,978	0,0000

W nawiasach zostały podane wartości statystyki t.

* istotne na poziomie 10^{-15}

Źródło: opracowanie własne.

Ostatnia kolumna tabeli 1 zawiera wartości *p*-value, które zapisano jako 0,0000. W rzeczywistości były to wartości wielokrotnie mniejsze. W wyniku obliczeń z wykorzystaniem programu MathCad uzyskano tak zwane maszynowe zero, co oznacza wielkość mniejszą od $\frac{1}{2} \cdot 10^{-15}$.

Zerowe wartości *p*-value oraz istotność współczynnika regresji na poziomie 10^{-15} oznacza, że został zrealizowany cel opracowania, jakim było wykazanie istotnej statystycznie zależności zachodzącej między współczynnikiem asymetrii A a zmienną s.

W świetle uzyskanych wyników nasuwa się pytanie o to, który miernik należałoby polecić inwestorom giełdowym, skoro mają zbliżoną wartość informacyjną. Odpowiedź brzmi: współczynnik asymetrii. Wynika to z faktu, że wyznaczając parametry rozkładu, podaje się wartość współczynnika asymetrii oraz wartość semiodchylenia standardowego. W przypadku stosowania miernika s należy dodatkowo wykonać obliczenia zgodnie ze wzorem (5). Drugim argumentem może być opisany w punkcie 1 przypadek niezgodności znaków obydwu mierników, który podważa wiarygodność wyników uzyskanych dla zmiennej s.

Podsumowując uzyskane rezultaty, można stwierdzić, że zamieszczenie wartości współczynnika asymetrii oraz semiodchylenia standardowego stanowi przejaw redundancji. W związku z tym można skierować postulat do osób zamieszczających rezultaty obliczeń parametrów rozkładu, aby zrezygnowały z podawania wartości semiodchylenia standardowego.

Literatura

Domański, C. (1990). *Testy statystyczne.* Warszawa: PWE.
Fisz, M. (1969). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Warszawa: PWN.
Sobczyk, M. (2004). *Statystyka*. Warszawa: PWN.
Tarczyński, W. (2002). *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*. Warszawa: PWE.
Zeliaś, A. (1997). *Teoria prognozy.* Warszawa: PWE.

ANALYSIS OF THE RELATIONSHIP BETWEEN ASYMMETRY COEFFICIENT VALUE AND STANDARD SEMI DEVIATION VALUE OF RATES OF RETURN FOR SELECTED STOCK MARKET INDICES AND JOINT-STOCK COMPANIES

Abstract

The paper analyses the value of standard semi deviation and the value of asymmetry coefficient of rates of return on the WIG20 companies and selected stock market indices in the years 2010–2013. In place of the standard semi deviation variable $s = \sigma - \sqrt{2} \cdot SV$ was introduced, which is a measure of distribution asymmetry. In order to prove the linear relationship between variable s and the asymmetry coefficient, Student's t-test was conducted. Then the parameters of the linear regression function as well as the value of Pearson linear correlation coefficient were estimated. To assess the quality of the derived model, the coefficient of linear determination was calculated. The statistical significance of structural parameters was examined using Student's t-test.

Translated by Ewa Stefanowska

Keywords: regression analysis, asymmetry coefficient, standard semi deviation, rate of return

JEL Codes: C2, C5, C51, C58