

Joanna Górna*
Karolina Górna**

Wzrost gospodarczy a możliwości aplikacji zależności przestrzennych – prawo Verdoorna

Słowa kluczowe: prawo Verdoorna, przestrzenny model autoregresyjny, model błędu przestrzennego, przestrzenny model Durbina, wzrost gospodarczy

Keywords: Verdoorn's law, spatial autoregressive model, spatial error model, spatial Durbin model, economic growth

Wprowadzenie

Zagadnie wzrostu gospodarczego gospodarek i regionów stale znajduje zainteresowanie wśród ekonomistów. Niezależenie od miernika, którym wzrost jest mierzony (PKB, PKB *per capita*, tempo wzrostu PKB), na przestrzeni lat powstało bardzo wiele teorii wzrostu poszukujących jego źródeł i determinant. Wśród najbardziej znanych teorii można wymienić: teorie klasyczne, neoklasyczne (egzogeniczne, podażowe), keynesowskie (popytowe), endogeniczne, a także koncepcję realnego cyklu koniunkturalnego. Ważną determinantą wzrostu w modelach klasycznych jest kumulacja kapitału. Neoklasyczne teorie szukają odpowiedzi na pytanie o długookresowe czynniki kształtujące poziom i wzrost wartości dodanej w gospodarce. Reprezentatywne podejście neoklasyczne przedstawia model Solowa przypisujący wzrost trzem czynnikom: wzrostowi zatrudnienia, wzrostowi kapitału oraz postępowi technicznemu. Modele keynesowskie opierają się na włączeniu inwestycji jako czynnika popytowego. Zgodnie z modelem Domara inwestycje rozszerzają zdolności produkcyjne gospodarki, przyczyniając się tym

* Magister Joanna Górna jest asystentem na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania (Katedra Ekonometrii i Statystyki) Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. E-mail: gorna.joanna@gmail.com.

** Magister Karolina Górna jest asystentem na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania (Katedra Ekonometrii i Statystyki) Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. E-mail: gorna.karolina@gmail.com.

do wzrostu gospodarczego. Z kolei model Kaldora skupia się także na inwestycjach, ale zwraca też uwagę na odpowiedni podział dochodu wspierający inwestowanie. Modele endogeniczne zainicjowane artykułem P.M. Romera¹ wyjaśniają wzrost gospodarczy w ramach modelu, czyli endogenicznie. Jest to inaczej niż w teoriach neoklasycznych, gdzie wzrost zależy od egzogenicznego postępu technicznego. W modelach endogenicznych następuje też odejście od założenia malejących przychodów z odtwarzalnych czynników produkcji. Wśród modeli endogenicznych można wymienić model Romera i model Lucasa. Ostatnie wymienione – teorie realnego cyklu koniunkturalnego – skupiają się wokół analizy szoków podażowych, które implikują cykliczność procesu tworzenia wartości dodanej w gospodarce². Wnikliwy przegląd teorii wzrostu, założeń modelowych, determinant można znaleźć u X. Sala-i-Martina³. Niezależnie od teorii istotne wydaje się w nich zagadnienie tempa produktywności i jego wzrostu. Z teoriami wzrostu gospodarczego nieodłącznie związane jest prawo Verdoorna, które za pomocą modelu ekonometrycznego tłumaczy, jakie czynniki wpływają na tempo wzrostu produktywności.

Wiele analiz dotyczących zagadnienia wzrostu traktuje regiony jako wyizolowane obiekty⁴. Oznacza to, że specyfikacje modeli wzrostu wykluczają występowanie interakcji między badanymi regionami. Jednak regiony nie są od siebie wzajemnie niezależne. Teoretyczne rozważania uznają ogromną istotność dyfuzji technologii, mobilności czynników i innych zależności między regionami, jednak w modelach empirycznych zależności te często są ignorowane⁵. Jednym z powodów, dla którego zależności przestrzenne powinny być uwzględniane w modelach wzrostu gospodarczego, jest to, że zmiany w jednym regionie rozprzestrzeniają się na inne, więc regiony wzajemnie wpływają na swój stan zrównoważony (*steady state*)⁶. Ignorowanie zależności przestrzennych w tego typu modelach może prowadzić do konstrukcji modelu obciążonego błędem oraz niepoprawnych wniosków z niego wynikających. W latach dziewięćdziesiątych XX wieku powstały pierwsze specyfikacje modeli wzrostu z uwzględnieniem efektów przestrzennych. Można wymienić tu między innymi badania A. Bernata⁷ oraz S.J. Reya i B.D. Montouri⁸.

¹ P.M. Romer, *Increasing Returns and Long-run Growth*, „The Journal of Political Economy” 1986, vol. 94 (5).

² *Ekonomia rozwoju*, red. B. Fiedor, K. Kociszewski, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2010, s. 85.

³ R.J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, The MIT Press, 2003.

⁴ B. Fingleton, E. Lopez-Bazo, *Empirical Growth Models with Spatial Effects*, „Papers in Regional Science” 2006, vol. 85 (2), s. 178.

⁵ S.J. Rey, B.D. Montouri, *US Regional Income Convergence: A Spatial Econometric Perspective*, „Regional Studies” 1999, vol. 33 (2), s. 144.

⁶ B. Fingleton, *Regional Economic Growth and Convergence: Insights from a Spatial Econometric Perspective*, w: *Advances in Spatial Econometrics*, red. L. Anselin, R. Florax, S. Rey, Springer-Verlag, Berlin 2004, s. 400.

⁷ A. Bernat, *Does Manufacturing Matter? A Spatial Econometric View of Kaldor's Laws*, „Journal of Regional Science” 1996, vol. 36.

⁸ S.J. Rey, B.D. Montouri, dz. cyt.

W związku z wpływem zależności przestrzennych między gospodarkami na ich tempo wzrostu celem artykułu jest wprowadzenie tych zależności do ekonometrycznego modelu bazującego na prawie Verdoorna.

Prawo Verdoorna

Prawo Verdoorna zostało nazwane od nazwiska holenderskiego ekonomisty P.J. Verdoorna⁹. Prawo to przedstawia zależność między wzrostem produkcji i wzrostem produktywności. Zgodnie z nim szybszy wzrost produkcji zwiększa produktywność. Prawo to różni się od neoklasycznych modeli wzrostu, takich jak model Solowa, które tłumaczą wzrost produktywności głównie jako wynik rozwoju wiedzy, nauki i techniki¹⁰. Pomimo czasu, jaki minął od przedstawienia prawa Verdoorna (1949 rok), nadal ma ono znaczącą wartość, ponieważ uwydatnia rolę endogenicznego wzrostu technicznego. W związku z tym jest pierwowzorem Nowej Teorii Wzrostu¹¹. Ponadto, w prawie Verdoorna zawarte są także rosnące efekty skali.

Prawo Verdoorna można zapisać w postaci:

$$g_y = \alpha_0 + q g_Y + \varepsilon \quad (1)$$

gdzie:

g_y – tempo wzrostu produktywności obliczane jako iloraz PKB i wielkości zatrudnienia,

α_0 – autonomiczne tempo wzrostu produktywności,

q – współczynnik Verdoorna,

g_Y – tempo wzrostu produkcji (tempo wzrostu PKB *per capita*),

ε – odzwierciedla procesy wpływające na g_y z założeniem o charakterze czysto losowym.

Ponieważ wzrost produktywności jest ściśle związany ze zmianami techniki i technologii, zmiany te nie są egzogeniczne, ale zależą od wzrostu produkcji¹². Współczynnik Verdoorna odzwierciedla stopę wzrostu tej części rozwoju technicznego, która jest indukowana wzrostem produkcji; zgodnie z sugestiami Verdoorna współczynnik ten powinien wynosić około 0,5¹³.

⁹ P.J. Verdoorn, *Verdoorn's Law in Retrospect: A Comment*, „The Economic Journal” 1980, vol. 90, s. 382–385.

¹⁰ N. Kaldor, *Causes of the Slow Growth in the United Kingdom*, Cambridge University Press, Cambridge 1966.

¹¹ B. Fingleton, dz. cyt., s. 399.

¹² Tamże, s. 401.

¹³ Tamże.

Zgodnie z sugestią B. Fingletona prawo Verdoorna powinno zostać rozszerzone o tempo wzrostu kapitału. W związku z tym zakłada się następującą funkcję typu Cobba-Douglasa:

$$Q = A_0 e^{\gamma t} K^\alpha E^\beta \quad (2)$$

gdzie:

Q – produkcja,

K – kapitał,

E – zatrudnienie,

α, β – współczynniki elastyczności,

γ – tempo wzrostu wszystkich czynników produkcji.

Po przekształceniach można przedstawić tempo wzrostu produktywności jako funkcję tempa wzrostu produkcji i tempa wzrostu kapitału k :

$$g_Y = \frac{\gamma}{\beta} + \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) g_Y + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) k + \mu \quad (3)$$

Przy założeniu, że tempo wzrostu kapitału k jest równe tempu wzrostu produkcji ($\frac{k}{g_Y} = const$), można usunąć k z modelu¹⁴ i zapisać prawo Verdoorna następująco:

$$g_Y = \frac{\gamma}{\beta} + \left(\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}\right) g_Y + \mu \quad (4)$$

Przy założeniu, że $q = \alpha + \beta - 1 > 0$, $\alpha + \beta > 1$ i z założeniami funkcji produkcji Cobba-Douglasa zachodzą rosnące efekty skali.

Do prawa Verdoorna można wprowadzić także inne zmienne, które nie wynikają bezpośrednio z funkcji produkcji, ale mają wpływ na tempo wzrostu produktywności. Mogą to być na przykład dyfuzje innowacji, instrumenty polityki regionalnej.

Przedmiot i zakres badania

Celem przeprowadzonego badania było sprawdzenie, czy na wybranym obszarze można mówić o spełnieniu prawa Verdoorna oraz czy przy badaniu tempa wzrostu należy uwzględniać zależności przestrzenne.

Badaniem objętych zostało 40 regionów klasyfikacji NUTS-2 ośmiu krajów Unii Europejskiej (Czechy, Estonia, Litwa, Łotwa, Polska, Słowacja, Słowenia, Węgry). Dane dotyczą lat 2001–2011 i są traktowane jako dane przekrojowo-czasowe. Pochodzą one z bazy Eurostatu.

¹⁴ J.S.L. McCombie, A.P. Thirlwall 1994, *Economic Growth and the Balance of Payments Constraint*, Palgrave Macmillan, Cambridge 1994, s. 56.

Sformułowana została następująca hipoteza:
Tempo wzrostu produktywności w danym regionie jest zależne od tempa wzrostu w regionach sąsiadujących.

Metodologia

Przyjęta w badaniu postać prawa Verdoorna jest następująca:

$$g_y = \alpha_0 + \rho g_y + \mu \quad (5)$$

Badane obiekty różnią się od siebie ze względu na swoją geograficzną lokalizację. W takim razie realizacje badanego zjawiska należałoby traktować jako przestrzenny proces stochastyczny. Przy takim podejściu tempo wzrostu produktywności w regionie i dla $i = 1, 2, \dots, N$ w ustalonym czasie traktuje się jako realizację procesu przestrzennego $Z(\mathbf{s}_i)$, gdzie $\mathbf{s}_i = [x_i, y_i]$ – współrzędne położenia regionów na płaszczyźnie.

Ponadto, każda lokalizacja na płaszczyźnie związana jest z pewną strukturą zależności przestrzennych. Zależności te opisywane są przez macierz powiązań \mathbf{W} . Najpowszechniejsza jest macierz sąsiedztwa oparta na wspólnej granicy. Macierz taką można przedstawić jako¹⁵:

$$\mathbf{W} = [w_{ij}]_{n \times n} \quad (6)$$

Należy następnie dokonać standaryzacji macierzy wierszami do jedności:

$$\mathbf{W}^* = [w_{ij}^*]_{n \times n}, \wedge_i \sum_{j=1}^n w_{ij}^* = 1 \quad (7)$$

Macierz \mathbf{W} pozwala badać występowanie zależności przestrzennych w badanym procesie. Dla danych przekrojowo-czasowych należy rozszerzyć macierz \mathbf{W} w następujący sposób:

$$\mathbf{W}^{I*} = [w_{ij}^{I*}]_{nt \times nt} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{W}^* \quad (8)$$

Analiza prawa Verdoorna przeprowadzana na poziomie regionalnym pozwala wprowadzić efekty przestrzenne. Aplikacja efektów przestrzennych może zostać dokonana przez wykorzystanie następujących modeli: przestrzenny model autoregresyjny (*spatial autoregressive model* – SAR), model błędu przestrzennego (*spatial error model* – SER),

¹⁵ *Ekonometria przestrzenna. Metody i modele analizy danych przestrzennych*, red. B. Suchecki, C.H. Beck, Warszawa, s. 106.

przestrzenny model Durbin (*spatial Durbin model* – SDM). W efekcie otrzymuje się następujące modyfikacje modelu (5):

1. Model SAR – w modelu tym przyjmuje się założenie, że wzrost tempa wzrostu produktywności w regionie jest w pewnym stopniu uzależnione od wzrostu w regionach sąsiadujących. W związku z tym wzrost g_y nie zależy tylko od g_Y , ale także od poziomu g_y w innych regionach. Wpływ ten zazwyczaj maleje wraz ze wzrostem odległości¹⁶. Model SAR dla prawa Verdoorna może przyjąć postać:

$$g_{y,i,t} = \alpha_0 + \rho g_Y + \rho \sum_{j \neq i} w_{ij}^{I*} g_{y,j,t} + \mu_{i,t} \quad (9)$$

2. Model SER – w tym modelu zakłada się występowanie interakcji przestrzennych, które są spowodowane wpływem czynników przypadkowych, niemodelowanych lub błędów pomiaru. Czynniki te pochodzą z badanego regionu oraz ze wszystkich innych badanych regionów¹⁷. Efekty działania tych czynników mają charakter globalny. Podobnie jak w przypadku modelu SAR maleją wraz ze wzrostem odległości. Prawo Verdoorna z błędem przestrzennym przyjmuje postać:

$$g_{y,i,t} = \alpha_0 + \rho g_Y + \mu_{i,t}, \mu_{i,t} = \lambda \sum_{j \neq i} w_{ij}^{I*} \mu_{j,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (10)$$

3. Model SDM – budowa modelu SDM opiera się na założeniu występowania autokorelacji przestrzennej zmiennych pominiętych w modelu¹⁸. Wobec tego w modelu danym jako:

$$y = x\beta + z \quad (11)$$

składnik resztowy z zawiera w sobie pominięte przestrzennie opóźnione zmienne, co można zapisać jako:

$$z = \rho Wz + \varepsilon \quad (12)$$

Zatem

$$y = x\beta + (I - \rho W)^{-1}\varepsilon \quad (13)$$

Jeśli ponadto zmienne x są skorelowane ze zmiennymi pominiętymi z , są wówczas także skorelowane z ε , co można zapisać jako zależność liniową:

$$\varepsilon = x\eta + v, v \sim N(0, \sigma_v^2 I_n) \quad (14)$$

W takim razie model (11) przyjmuje postać:

$$y = x\beta + (I - \rho W)^{-1}(x\eta + v) \quad (15)$$

¹⁶ B. Finlgeton, E. Lopez-Bazo, dz. cyt., s. 181.

¹⁷ *Ekonometria przestrzenna...*, s. 250.

¹⁸ B. Finlgeton, E. Lopez-Bazo, dz. cyt., s. 280.

którą można przekształcić:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{y} &= (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{x}\beta + \mathbf{x}\eta + \mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{x}(\beta + \eta) + \mathbf{W}\mathbf{x}(-\rho\beta) + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (16)$$

Ostatecznie przekształcenia prowadzą do postaci¹⁹:

$$\mathbf{y} = \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{x}\beta_1 + \mathbf{W}\mathbf{x}\beta_2 + \mathbf{v} \quad (17)$$

Postać (17) wskazuje, że model SDM zakłada jednoczesne występowanie autoregresji przestrzennej i regresji krzyżowej²⁰. Dla rozpatrywanego problemu model SDM przyjmuje postać:

$$g_{y,i,t} = \alpha_0 + \rho g_Y + m \sum_{j \neq i} w_{ij}^{I*} g_{Y,j,t} + \rho \sum_{j \neq i} w_{ij}^{I*} g_{y,j,t} + \mu_{i,t} \quad (18)$$

W badaniu zostały wykorzystane następujące testy statystyczne:

- a) test *I* Morana do badania przestrzennej niezależności;
- b) testy mnożnika Lagrange'a (LM_{SER} , LM_{SAR} , RLM_{SER} , RLM_{SAR}) jako diagnostyki przestrzennej zależności;
- c) test Common Factor do zbadania, czy należy wykorzystać model SER, czy DSM – hipoteza zerowa tego testu ogranicza wartość parametru przy przestrzennie opóźnionej zmiennej objaśniającej do iloczynu parametru przy opóźnieniu zmiennej objaśnianej i parametru przy nieopóźnionej zmiennej objaśniającej. Odrzucenie hipotezy zerowej skutkuje wyborem modelu SDM²¹.

Wyniki empiryczne

Jako pierwszy został oszacowany model liniowy, w którym nie zostały uwzględnione zależności przestrzenne, tj. model dany wzorem (5). Otrzymane wyniki prezentuje tabela 1. Wyniki testu *I* Morana wskazują na występowanie autokorelacji przestrzennej, co może być rezultatem pominięcia macierzy sąsiedztwa w modelu. Jakkolwiek test Morana wskazuje na konieczność wprowadzenia przestrzennych autozależności, nie wskazuje jednak alternatywy – jaki model przestrzenny powinien zostać wybrany. Dlatego zastosowano także testy mnożników Lagrange'a, które wskazują, jaki rodzaj zależności występuje. Test LM_{SER} dotyczy alternatywy dla modelu liniowego w postaci modelu SER, test LM_{SAR} z kolei formułuje jako alternatywę model SAR²². W tabeli 1 znajdują

¹⁹ J.P. Lesage, M.M. Fischer, *Spatial Growth Regressions: Model Specification, Estimation and Interpretation*, „Spatial Economic Analysis” 2008, vol. 3, no. 3, s. 280.

²⁰ *Ekonometria przestrzenna...*, s. 253.

²¹ Tamże, s. 299; L. Anselin, *An Introduction to Spatial Regression Analysis in R*, University of Illinois, Urbana-Champaign 2003, s. 16.

²² *Ekonometria przestrzenna...*, s. 295.

się także odporne wersje testów LM. Wyniki tych testów potwierdzają wnioski związane ze statystyką Morana – istotne zależności przestrzenne. Jednak nadal nie jest jasne, jaki rodzaj zależności w modelu powinien zostać uwzględniony.

Tabela 1. Wyniki estymacji i weryfikacji modelu liniowego LM

Parametr	Ocena parametru	Błąd standardowy	p-value
α_0	0,0071	0,0023	0,0018
q	0,8329	0,0198	0,0000
R^2 : 0,8023			
Statystyka F: 1778; p-value: 0,0000			
Statystyka I Morana: 0,2193; p-value: 0,0000			
LM_{SER} : 38,1661; p-value: 0,0000			
LM_{SAR} : 38,3420; p-value: 0,0000			
RLM_{SER} : 6,9191; p-value: 0,0085			
RLM_{SAR} : 7,0950; p-value: 0,0077			

Źródło: obliczenia własne.

Ponieważ została stwierdzona istotność zależności przestrzennych, w następnej kolejności oszacowano modele zawierające macierz sąsiedztwa W . Tabela 2 prezentuje wyniki oszacowania modelu typu SAR. Parametr ρ wskazuje, że średnio 25% rozwoju technicznego „rozprzestrzenia” się do regionów sąsiednich. Wartość statystyki I Morana wskazuje na wyeliminowanie autokorelacji przestrzennej z reszt modelu.

Tabela 2. Wyniki estymacji i weryfikacji modelu SAR

Parametr	Ocena parametru	Błąd standardowy	p-value
α_0	0,0035	0,0022	0,1147
q	0,6474	0,0359	0,0000
ρ	0,2550	0,0417	0,0000
test LR : 37,4840; p-value: 0,0000			
Statystyka Walda: 37,3430; p-value: 0,0000			
Statystyka I Morana: 0,0316; p-value: 0,1682			
AIC: -1662,3			
LM : 1,6257; p-value: 0,2023			

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki otrzymane dla modelu typu SER zaprezentowano w tabeli 3. Istotność parametru λ wskazuje na występowanie zależności przestrzennych czynników przypadkowych. Kryterium informacyjne Akaike’a sygnalizuje, że następuje większa utrata informacji niż w modelu typu SAR.

Tabela 3. Wyniki estymacji i weryfikacji modelu SER

Parametr	Ocena parametru	Błąd standardowy	p-value
α_0	0,0088	0,0031	0,0045
q	0,8107	0,0255	0,0000
λ	0,3266	0,0552	0,0000
test <i>LR</i> : 33,0890; p-value: 0,0000			
Statystyka Walda: 34,9950; p-value: 0,0000			
Statystyka I Morana: -0,0138; p-value: 0,6284			
AIC: -1657,9			

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4 zawiera wyniki uzyskane dla modelu SDM. Zarówno w tym modelu, jak i w modelu SER test I Morana wskazuje na eliminację autokorelacji przestrzennej z reszt. Wynik testu COMFAC informuje jednak, że model SDM jest lepszy. Poza tym wartość AIC sugeruje, że w przypadku SDM następuje najmniejsza utrata informacji w porównaniu z innymi szacowanymi w ramach tego opracowania modelami przestrzennymi.

Tabela 4. Wyniki estymacji i weryfikacji modelu SDM

Parametr	Ocena parametru	Błąd standardowy	p-value
α_0	0,0039	0,0022	0,0821
q	0,7042	0,0447	0,0000
m	-0,1281	0,0653	0,0500
ρ	0,3263	0,0551	0,0000
test <i>LR</i> : 34,2400; p-value: 0,0000			
Statystyka Walda: 35,0950; p-value: 0,0000			
Statystyka I Morana: -0,0166; p-value: 0,6573			
AIC: -1664,2			
<i>LM</i> : 6,7497; p-value: 0,0094			
Common Factor Test (DSM czy SER): 8,3036; p-value: 0,0040			

Źródło: obliczenia własne.

W toku badania oszacowane były także modele rozszerzone o dodatkowe zmienne objaśniające, opisujące indywidualne charakterystyki każdego z regionów. Były to: kapitał ludzki (wyznaczany jako udział osób z wyższym wykształceniem w grupie wiekowej 25–64 lata) oraz tak zwana luka technologiczna (dla każdego regionu liczona była ona w następujący sposób: $1 - \frac{B+R_{i,t}}{\max(B+R_t)}$ – wydatki na B + R w i-tym regionie w roku t, $\max(B + R_t)$ – maksymalna wartość wydatków na B + R w roku t). W każdym z szacowanych modeli (LM, SAR, SER, SDM) parametry przy tych zmiennych nie wykazywały istotności statystycznej.

Podsumowanie

Zależności przestrzenne w porównywaniu produktywności w badanych regionach okazały się istotne w każdym z zaprezentowanych modeli. Najlepsze właściwości posiada jednak model SDM, który zawiera autoregresję przestrzenną oraz przestrzenną regresję krzyżową. Sygnalizuje to, że na tempo wzrostu produktywności w danym regionie wpływa tempo wzrostu produkcji PKB *per capita* odnotowane u sąsiadów.

Współczynnik Verdoorna w żadnym z prezentowanych modeli nie osiągnął wartości 0,5, lecz wartości większe. Oznacza to większy wpływ tempa wzrostu produkcji na tempo wzrostu produktywności, niż sugerowałoby prawo Verdoorna. Już sam Verdoorn napisał jednak, że współczynnik ten wyznaczony w 1949 roku może przyjmować odmienne wartości²³.

Literatura

- Anselin L., *An Introduction to Spatial Regression Analysis in R*, University of Illinois, Urbana–Champaign 2003.
- Barro R.J., Sala-i-Martin X., *Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge 2003.
- Bernat A., *Does Manufacturing Matter? A Spatial Econometric View of Kaldor's Laws*, „Journal of Regional Science” 1996, vol. 36.
- Ekonometria przestrzenna. Metody i modele analizy danych przestrzennych*, red. B. Suchecki, C.H. Beck, Warszawa.
- Ekonomia rozwoju*, red. B. Fiedor, K. Kociszewski, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2010.
- Fingleton B., *Regional Economic Growth and Convergence: Insights from a Spatial Econometric Perspective*, w: *Advances in Spatial Econometrics*, red. L. Anselin, R. Florax, S. Rey, Springer-Verlag, Berlin 2004.
- Fingleton B., Lopez-Bazo E., *Empirical Growth Models with Spatial Effects*, „Papers in Regional Science” 2006, vol. 85 (2).

²³ P.J. Verdoorn, dz. cyt., s. 385.

- Kaldor N., *Causes of the Slow Growth in the United Kingdom*, Cambridge University Press, Cambridge 1966.
- Lesage J.P., Fischer M.M., *Spatial Growth Regressions: Model Specification, Estimation and Interpretation*, „Spatial Economic Analysis” 2008, vol. 3, no. 3.
- McCombie J. S. L., Thirlwall A. P., *Economic Growth and the Balance of Payments Constraint*, Palgrave Macmillan, Cambridge 1994.
- Rey S.J., Montouri B.D., *US Regional Income Convergence: A Spatial Econometric Perspective*, „Regional Studies” 1999, vol. 33 (2).
- Romer P.M., *Increasing Returns and Long-run Growth*, „The Journal of Political Economy” 1986, vol. 94 (5).
- Verdoorn P.J., *Verdoorn's Law in Retrospect: A Comment*, „The Economic Journal” 1980, vol. 90.

Streszczenie

Pomimo wielu lat przeprowadzania badań nad wzrostem gospodarczym jest to temat nadal aktualny i często podejmowany. Związane z nim zagadnienie nierówności rozwoju poszczególnych regionów wskazuje na konieczność uwzględnienia zależności przestrzennych podczas specyfikacji modelu. Wzrost produktywności w danym regionie ma niezaprzeczalny wpływ na poziom wzrostu gospodarczego. Zależność produktywności od wielkości produkcji oraz innych czynników przedstawia prawo Verdoorna. Jego postać pozwala na implikację elementów ekonometrii przestrzennej, dzięki czemu można wyjaśniać zmiany tempa wzrostu produktywności jako efekt wpływu czynników pochodzących z regionów sąsiednich.

W opracowaniu przedstawione zostało prawo Verdoorna z uwzględnieniem zależności przestrzennych. Zaprezentowano następujące modele ekonometrii przestrzennej: model przesunięcia przestrzennego (przestrzenny model autogresyjny), model błędu przestrzennego oraz przestrzenny model Durбина.

Badaniem objętych zostało osiem państw Unii Europejskiej: Czechy, Estonia, Litwa, Łotwa, Polska, Słowacja, Słowenia, Węgry. Zakres czasowy badania to lata 2001–2011.

Economic growth with spatial effects – the Verdoorn's law

Regardless many years of studies of economic growth this matter is still current and often undertaken by economists, economic geographers and regional scientists. The issue strictly connected to that subject is disparity of individual regions' levels of development. This indicates a necessity of implication of the spatial dependencies during model specification. Increase of productivity in particular region has undisputed influence on level of economic growth. The Verdoorn's law presents the relationship between the growth of output (GDP) and the growth of productivity. Thanks to its form it is possible to incorporate spatial effects or externalities, so changes of rate of productivity growth can be explained by factors situated in neighboring regions.

This paper presents Verdoorn's law with spatial effects. Following models will be used: spatial autoregressive model, spatial error model and spatial Durbin model.

Spatial range of the study are 8 European Union countries: Czech Republic, Estonia, Lithuania, Latvia, Slovakia, Slovenia, Hungary. Investigated period is 2001–2011.

Translated by Joanna Górna and Karolina Górna